

Wahrscheinlichkeitsrechnung, Statistik und Anwendungen.

Wahrscheinlichkeitsrechnung, mathematische Statistik:

● Dörge, Karl: Wahrscheinlichkeitsrechnung für Nichtmathematiker. Unter Mitwirkung von Hans Klein. Berlin: Walter de Gruyter 1939. 113 S. RM. 6.—.

● Wavre, M. R., M. Fréchet, G. Pólya et W. Heisenberg: Conférences d'introduction (Actualités scient. et industr. Nr. 734.) Paris: Hermann & Cie. 1938. 52 pag. Frs. 15.—.

Inhalt: Wavre: Introduction (S. 13—15). — Fréchet: Allocution (S. 16—17). — M. Fréchet: Les principaux courants dans l'évolution récente des recherches sur le calcul des probabilités (S. 19—23). Orientierungsvortrag über die neueren Fortschritte der Wahrscheinlichkeitstheorie zur Eröffnung des Kolloquiums in Genf am 11. bis 16. X. 1937. — G. Pólya: Sur la promenade au hasard dans un réseau de rues (S. 25 bis 44). Drei Wahrscheinlichkeitsaufgaben (Kopf-Wappen-Spiel, Irrfahrt in einem Straßennetz, Geschiebetrieb) werden verglichen; an diesen wird der Übergang von Differenzen- zu Differentialgleichungen in der Wahrscheinlichkeitsrechnung anschaulich gemacht. — W. Heisenberg: Wahrscheinlichkeitsaussagen in der Quantentheorie der Wellenfelder (S. 45—51). Kritische Bemerkungen über die Wesentlichkeit und die Unvermeidbarkeit des Entstehens von statistischen Gesetzmäßigkeiten, anstatt von deterministischen Gesetzen in der Physik; Erläuterung durch Beispiele.

Bruno de Finetti (Trieste).

● Cantelli, P., W. Feller, M. Fréchet, R. de Misès, I. F. Steffensen et A. Wald: Les fondements du calcul des probabilités. (Actualités scient. et industr. Nr. 735.) Paris: Hermann & Cie. 1938. 100 pag. Frs. 25.—.

Inhalt: F. P. Cantelli: Sur la définition des variables éventuelles (S. 5). — W. Feller: Sur les axiomatiques du calcul des probabilités et leurs relations avec les expériences (S. 7—21). Darstellung der Theorie von Tornier und Bemerkungen über die Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung. — M. Fréchet: Exposé et discussion de quelques recherches récentes sur les fondements du calcul des probabilités (S. 23—55). Die „modernisierte klassische Theorie“ und die Theorie von Mises werden im Licht der Untersuchungen von J. A. Ville (dies. Zbl. 21, 145) verglichen. — R. de Misès: Quelques remarques sur les fondements du calcul des probabilités (S. 57—66). Verf. verteidigt seine Theorie gegen die Einwände von Fréchet, Lévy usw. und erklärt seinen Standpunkt bezüglich der Untersuchungen von Wald. — J. F. Steffensen: Fréquence et probabilité (S. 67—78). Verf. pflegt im Unterricht das Bernoullische Theorem als einen rein kombinatorischen Satz hinzustellen und erst darauf den Wahrscheinlichkeitsbegriff und dessen statistische Deutung zu begründen. — A. Wald: Die Widerspruchsfreiheit des Kollektivbegriffes (S. 79—99). Die Definitionsbedingungen des Kollektivbegriffes (von Mises) werden durch schwächere widerspruchsfreie Bedingungen ersetzt: Grenzwert- und Regellosigkeitsaxiome werden nämlich nicht für „alle“ Auswahlvorschriften und für „alle“ Teilmengen des Merkmal-raumes, sondern nur für gewisse Systeme γ und M gefordert. *Bruno de Finetti.*

● Cramér, H., P. Lévy et R. de Misès: Les sommes et les fonctions de variables aléatoires. (Actualités scient. et industr. Nr. 736.) Paris: Hermann & Cie. 1938. 70 pag. Frs. 20.—.

Inhalt: H. Cramér: Sur un nouveau théorème-limite de la théorie des probabilités (S. 5—23). Für die Auswertung der Wahrscheinlichkeit von großen Abweichungen ist die asymptotische Formel $F_n(x) = \Phi(x)$ [$\Phi(x)$ = Gaußsche Verteilung] im bekannten Bernoullischen Falle auch dann gültig, wenn x wohl mit n unbegrenzt, aber nicht zu

rasch wächst (Smirnof); Verf. zeigt dasselbe (und andere Nebenergebnisse) im allgemeineren Falle der Summe von unabhängigen gleichverteilten Zufallsgrößen. — P. Lévy: L'arithmétique des lois de probabilité et les produits finis des lois de Poisson (S. 25—59). Verf. untersucht die Zerlegbarkeit von Verteilungen eines Typus, der eine Verallgemeinerung der Poissonschen Verteilungen darstellt und zu einer Verallgemeinerung des Theorems von Raikoff führt. — R. de Misès: Généralisation des théorèmes de limite classiques (S. 61—68). Nicht nur für lineare Funktionen von sehr vielen unabhängigen Zufallsgrößen (wie wohl bekannt), sondern für alle „statistischen Funktionen“ (Funktionen der Verteilung dieser Zufallsgrößen) gilt die Gaußsche Verteilung als asymptotisches Gesetz. *Bruno de Finetti (Trieste).*

● Hopf, E., B. Hostinský, O. Onicescu et V. Romanovsky: *Le principe ergodique et les probabilités en chaîne.* (Actualités scient. et industr. Nr. 737.) Paris: Hermann & Cie. 1938. 68 pag. Frs. 18.—.

E. Hopf: Statistische Probleme und Ergebnisse in der klassischen Mechanik. Cette conférence est consacrée à l'étude des mouvements dans l'espace des phases Ω et leurs propriétés asymptotiques. Si P est la position initiale du point mobile et $P_t = T_t(P)$ sa position à l'époque t , il y a, pour les systèmes conservatifs, une fonction positive $f(P)$ telle que, A étant un sous-ensemble de Ω et dV l'élément de volume, $m(A) = \int_A f(P) dV$ ne change pas, si l'on applique aux points P de A la transformation $T_t(P)$. Si $F(P)$ est une fonction sommable et λ une constante réelle, la limite

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} e^{-i\lambda t} F(T_t(P)) dt$$

existe avec la probabilité égale à l'unité. L'auteur considère différentes questions qui se rattachent à la démonstration du théorème: La transformation $T_t(P)$ est transitive en général, c'est-à-dire il y a un point P dans Ω dont les conséquents $P_t = T_t(P)$ forment un ensemble partout dense. — B. Hostinský: Les fluctuations. Dans cette conférence les probabilités relatives à la distribution de N objets en n compartiments sont considérées. On suppose que la distribution soit opérée plusieurs fois de suite. Il y a x_1 objets dans un compartiment A après la première distribution, il y en a x_2 dans A après la seconde et ainsi de suite. Les nombres x_1, x_2, \dots diffèrent en général entre eux, il y a des fluctuations. Trois manières différentes de distributions sont étudiées. La première manière (classique) consiste à admettre qu'il y a une probabilité constante $1/n$ pour qu'un objet se trouve dans un compartiment donné. La deuxième manière (problème de D. Bernoulli et de Laplace: tirages des boules de deux urnes avec l'échange des boules extraites) donne lieu à des probabilités liées en chaîne de Markoff (chaque urne remplace ici un compartiment; $N = 2$). La troisième manière de distribuer les objets correspond à une autre chaîne de Markoff. — O. Onicescu: Théorie générale des chaînes à liaisons complètes. L'auteur montre d'abord le parallélisme entre la théorie des chaînes de Markoff et celle des équations différentielles (p. ex. équation de la diffusion). Il considère ensuite des problèmes plus compliqués. On tire des boules d'une urne et l'on change la composition de l'urne après chaque tirage d'une manière déterminée (ce cas se ramène à une chaîne de Markoff). Ou bien on change, à chaque tirage, la composition de l'urne de telle manière que la composition avant le $(n+1)^{\text{ième}}$ tirage dépend d'une part du résultat du $n^{\text{ième}}$ tirage et en même temps de la composition de l'urne avant le $n^{\text{ième}}$ tirage. — V. Romanovsky: Quelques problèmes nouveaux de la théorie des chaînes de Markoff. L'auteur indique quelques directions nouvelles qui pourraient être poursuivies dans la théorie des chaînes. D'abord le cas est considéré où une suite de variables aléatoires u_0, u_1, \dots qui forme une chaîne est en corrélation avec une autre suite de variables aléatoires v_0, v_1, \dots sous certaines conditions. L'auteur montre que la corrélation des sommes $\sum_{k=0}^{s-1} (u_k - x_0), \sum_{k=0}^{s-1} (v_k - y_0)$

(où x_0 et y_0 représentent respectivement les valeurs moyennes de u_h et de v_h indépendantes de h) a pour limite la corrélation normale, si s augmente indéfiniment. Ensuite l'auteur étudie les propriétés des chaînes cycliques c'est-à-dire telles que la matrice des probabilités de passage peut être mise sous la forme cyclique

$$\Phi = \begin{pmatrix} 0, & L_{12}, & 0, & \dots, & 0 \\ 0, & 0, & L_{23}, & \dots, & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0, & 0, & 0, & \dots, & L_{k-1,k} \\ L_{k1}, & 0, & 0, & \dots, & 0 \end{pmatrix}$$

par une permutation de lignes et de colonnes. Il expose dans un dernier chapitre des procédés statistiques destinés à établir la loi de la chaîne supposée Φ , c'est-à-dire à trouver les probabilités de passage de la chaîne Φ en observant les fréquences des événements $A_1, A_2 \dots A_n$ dans les épreuves examinées. *B. Hostinský.*

● **Bernstein, S., E. Slutsky et H. Steinhaus: Les fonctions aléatoires.** (Actualités scient. et industr. Nr. 738.) Paris: Hermann & Cie. 1938. 76 pag. Frs. 20.—.

Inhalt: S. Bernstein: Équations différentielles stochastiques (S. 5—31). — E. Slutsky: Sur les fonctions aléatoires presque périodiques et sur la décomposition des fonctions aléatoires stationnaires en composantes (S. 33—55). — H. Steinhaus: La théorie et les applications des fonctions indépendantes au sens stochastique (S. 58—73). Zusammenfassende Darstellung der Ergebnisse und Anwendungen der Theorie der (nach Definition des Verf.) „stochastisch unabhängigen“ Funktionen.

Bruno de Finetti (Trieste).

● **de Finetti, B., N. Gliwienko et G. Neyman: Conceptions diverses.** (Actualités scient. et industr. Nr. 739.) Paris: Hermann & Cie. 1938. 60 pag. Frs. 15.—.

Inhalt: B. de Finetti: Sur la condition d'„équivalence partielle“ (S. 5—18). — N. Gliwienko: Sur la loi des grands nombres dans l'espace fonctionnel (S. 19—23). — J. Neyman: L'estimation statistique traitée comme un problème classique de probabilité (S. 25—57). Das Verfahren der „Methods of estimation“ (R. A. Fisher) wird verfeinert, indem nicht nur die „wahrscheinlichste“ Schätzung bestimmt wird, sondern auch ein Bereich, der die bezüglichen Unbestimmtheitsgrenzen darstellt. *Bruno de Finetti.*

● **Dodd, E., Ch. Jordan et N. Obrechhoff: La statistique mathématique.** (Actualités scient. et industr. Nr. 740.) Paris: Hermann & Cie. 1938. 66 pag. Frs. 18.—.

Inhalt: E. L. Dodd: Certain coefficients of regression or trend associated with largest likelihood (S. 5—14). Verf. zeigt, wie die von ihm betrachteten Regressionskoeffizienten als Mittelwerte (im Sinne von Chisini) angesehen werden können. — Ch. Jordan: Critique de la corrélation au point de vue de la probabilité (S. 15—33). Kritische Bemerkungen über die verschiedenen Korrelationskoeffizienten und ihre verschiedenen Bedeutungen und Anwendungsbereiche. — N. Obrechhoff: Sur la loi de Poisson, la série de Charlier et les équations linéaires aux différences finies du premier ordre à coefficients constants (S. 35—64). Vgl. dies. Zbl. 22, 126.

Bruno de Finetti (Trieste).

● **Glivenko, Valère: Théorie générale des structures.** (Actualités scient. et industr. Nr. 652.) Paris: Hermann & Cie. 1938. 56 pag. Frs. 15.—.

McKinsey, J. C. C.: A note on Reichenbach's axioms for probability implication. Bull. Amer. Math. Soc. 45, 799—800 (1939).

Reichenbach hat in seinem Buch über Wahrscheinlichkeitslehre ein Axiomensystem für die Wahrscheinlichkeitsimplikation aufgestellt. Verf. zeigt, daß dieses Axiomensystem nicht widerspruchsfrei ist, und gibt die nötigen Abänderungen an. *Kamke.*

Larguier, Everett H.: A matrix theory of n -dimensional measurement. Duke math. J. 5, 729—739 (1939).

En 1933, H. A. Copeland (ce Zbl. 7, 252) a donné une exposition des fondements

de la théorie de la mesure qui a été employée pour définir les probabilités dans la dimension 1. L'auteur donne l'extension au cas de n dimensions. *B. Hostinský* (Brünn).

Onicescu, Octav: La définition de la probabilité et le problème de la roulette. *Bull. Sect. Sci. Acad. Roum.* **21**, 106—109 (1939).

Poincaré hat bekanntlich gezeigt: wenn die Wahrscheinlichkeit dafür, daß der erreichte Drehungswinkel ϑ bei der Roulette zwischen α und β liegt, durch

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\vartheta) d\vartheta$$

gegeben ist, und wenn $f(\vartheta)$ eine beschränkte Ableitung hat, so werden bei gegebenem f stets die Wahrscheinlichkeiten für rouge und noir um so genauer gleich $\frac{1}{2}$, je größer die Anzahl der Sektoren für rouge und noir wird. Verf. weist darauf hin, daß die Anzahl der Sektoren beim üblichen Roulettespiel fest ist und daher die Problemstellung abgeändert werden muß, und behandelt die neue Fragestellung. *Kamke* (Tübingen).

Ottaviani, G.: Sulla probabilità che una prova su due variabili casuali X e Y verifichi la disuguaglianza $X < Y$ e sul corrispondente scarto quadratico medio. *Giorn. Ist. Ital. Attuari* **10**, 185—192 (1939).

Verf. leitet Formeln ab für Erwartungswert und mittlere quadratische Abweichung der mit der „Transvariationswahrscheinlichkeit“ verwandten Häufigkeit, mit welcher in einer an zwei voneinander unabhängigen Zufallsvariablen X , Y ausgeführten Probe $X < Y$ ist, und zwar zunächst für den Fall unabhängiger Proben, sodann für den Fall, daß die Proben entsprechend dem Urnenschema ohne Zurücklegen untereinander abhängig sind.

M. P. Geppert (Bad Nauheim).

Kampen, E. R. van, and Aurel Wintner: A limit theorem for probability distributions on lattices. *Amer. J. Math.* **61**, 965—973 (1939).

Verallgemeinerung des Irrfahrtproblems: Pölya [Math. Ann. **84**, 148—160 (1921)] hatte den Fall eines orthogonalen Straßennetzes behandelt; hier bilden die an jedem Schritt möglichen Bewegungen ein willkürliches Gitter des k -dimensionalen Raumes.

Bruno de Finetti (Trieste).

Volberg, O.: Problème de la queue stationnaire et non-stationnaire. *C. R. Acad. Sci. URSS*, N. s. **24**, 657—661 (1939).

Soit s le nombre de quelques appareils desservant un ensemble infini de clients qui peuvent exiger d'être desservis pendant l'un des deux intervalles de temps égaux avec la même probabilité. Nous considérons la moyenne fréquence de demande comme donnée et nous admettons que le client, qui exige un service au moment où l'appareil est occupé, ne renonce pas à sa demande et se met en queue en attendant que l'appareil devienne vacant. Chaque client qui exige d'être desservi, sera fixé à l'appareil dont c'est le tour, le client suivant à l'appareil suivant, de sorte qu'ayant s appareils, chaque client remplace à l'appareil celui qui a demandé du service s hommes avant lui. En faisant des hypothèses convenables l'auteur trouve que la fonction de répartition du temps d'attente du client qui demande d'être desservi au moment t tend (quand $t \rightarrow \infty$) vers une loi stationnaire dont il donne l'expression. *B. Hostinský* (Brünn).

Huntington, E. V.: Frequency distribution of product and quotient. *Ann. math. Statist.* **10**, 195—198 (1939).

Elementary proofs concerning the distributions of sum, difference, product and quotient, of two random variables whose respective distributions are assigned arbitrarily in advance. These proofs fill obvious gaps in the mathematical theory of current statistical texts.

Albert A. Bennett (Providence).

Larsen, Harold D.: Moments about the arithmetic mean of a hypergeometric frequency distribution. *Ann. math. Statist.* **10**, 198—201 (1939).

An elementary derivation of the explicit values of the first few moments (about the arithmetic mean) of the hypergeometric distribution. *Albert A. Bennett*.

Dieulefait, C. E.: Sui momenti delle distribuzioni ipergeometriche. Giorn. Ist. Ital. Attuari 10, 221—224 (1939).

Direkte Bestimmung der Momente der Pölyaschen (und, als Spezialfall, der hypergeometrischen) Verteilung als Koeffizienten der Taylorsche Entwicklung der charakteristischen Funktion.

Bruno de Finetti (Trieste).

Hsu, P. L.: On the distribution of roots of certain determinantal equations. Ann. of Eugen. 9, 250—258 (1939).

Haben die Zufallsvariablen y_{ir}, z_{it} ($i = 1, \dots, p$; $r = 1, \dots, n_1$; $t = 1, \dots, n_2$) das Verteilungsgesetz

$$\text{const. exp} \left[-\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^p \alpha_{ij} (a_{ij} + b_{ij}) \right] \prod dy \cdot dz,$$

wo

$$a_{ij} = \sum_{r=1}^{n_1} y_{ir} y_{jr}, \quad b_{ij} = \sum_{t=1}^{n_2} z_{it} z_{jt},$$

und ist $n_2 \geq p$, so hat die Determinantengleichung $|a_{ij} - \vartheta(a_{ij} + b_{ij})| = 0$ bekanntlich genau $\min(p, n_1)$ reelle Wurzeln ϑ zwischen 0 und 1. Die Arbeit untersucht die genaue Verteilung der Wurzeln.

Bodewig (Den Haag).

Gnedenko, B.: Sur les lois limites de la théorie des probabilités. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 23, 870—873 (1939).

Dans un travail précédent [C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 22, 60—63 (1939); ce Zbl. 22, 61] l'auteur a donné des conditions nécessaires et suffisantes pour la convergence des lois de distributions des sommes de variables indépendantes vers la loi limite; il exprime les conditions cherchées sous une forme plus simple.

Hostinský.

Gnedenko, B. V., and A. V. Groshev: On the convergence of distribution laws of normalized sums of independent random variables. Rec. math. Moscou, N. s. 6, 521—539 u. engl. Zusammenfassung 539—541 (1939).

Supposons qu'une suite de variables aléatoires indépendantes $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ soit donnée avec les lois de distribution $F_1(x), F_2(x), \dots, F_n(x), \dots$. La question se pose quelles sont les conditions auxquelles les fonctions $F_k(x)$ doivent satisfaire pour que l'on puisse choisir deux constantes A_n et B_n telles que les fonctions de distribution des sommes

$$s_n = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{B_n} - A_n$$

convergent vers une loi limite. L'auteur indique les conditions nécessaires et suffisantes pour que cette propriété se présente en admettant certaines hypothèses simples sur la dispersion.

B. Hostinský (Brünn).

Gnedenko, B.: On the domains of attraction of stable laws. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 24, 640—642 (1939).

On dit que la loi de repartition $F(x)$ appartient au domaine d'attraction de la loi $\Phi(x)$, si l'on peut trouver deux constantes $B_n > 0$ et A_n telles que la loi de repartition de la somme

$$S_n = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_r}{B_n} - A_n$$

où $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ sont des variables éventuelles indépendantes avec la loi de repartition $F(x)$, converge vers $\Phi(x)$. L'auteur étudie les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une loi $F(x)$ appartienne au domaine d'attraction d'une loi $\Phi(x)$ de nature particulière et quelques questions voisines.

B. Hostinský (Brünn).

Smirnov, N.: Sur les écarts de la courbe de distribution empirique. Rec. math. Moscou, N. s. 6, 3—24 u. franz. Zusammenfassung 25—26 (1939) [Russisch].

Soit $F(x)$ la fonction des probabilités totales d'une variable aléatoire x . Nous désignerons par $S_n(x)$ la courbe formée de n marches, qui représente les résultats de n épreuves indépendantes. Nous supposons que la fonction $F(x)$ est continue et croissante pour toutes les valeurs de x . Soit v_n le nombre des cas où l'écart $S_n(x) - F(x)$ change de signe en passant des valeurs négatives aux valeurs positives et $\Phi_n(t) = P(v_n \leq t \sqrt{n})$ ($t \geq 0$). La probabilité de la convergence uniforme de la suite $S_1(x)$,

$S_2(x), \dots S_n(x), \dots$ vers $F(x)$ est égale à 1 (Glivenko, Giorn. Ist. Ital. Attuari 1933; ce Zbl. 6, 174). L'auteur démontre que, quelle que soit la fonction $F(x)$ la suite des fonctions $\Phi_n(t)$ converge pour $n \rightarrow \infty$ vers la loi limite de distribution $\Phi(t) = 1 - e^{-\frac{t}{2}}$ ($t > 0$) et $\Phi(t) = 0$ ($t \leq 0$), ainsi que d'autres propriétés de la suite des fonctions $\Phi_n(t)$. B. Hostinský (Brünn).

Doeblin, W.: Sur certains mouvements aléatoires discontinus. Skand. Aktuarie Tidskr. 22, 211—222 (1939).

Soit W un ensemble d'un espace euclidien, x et y deux points dans W , E un sous-ensemble de W , $dA y$ un sous-ensemble de W contenant le point y (variable d'intégration). Considérons un point mobile ayant un mouvement aléatoire sur W . Supposons qu'il existe une probabilité $P(x, E, s, t)$, $s \leq t$, pour que le point mobile, étant à l'instant s en x soit à l'instant t dans E , probabilité ne dépendant pas du mouvement du point antérieur à l'instant s . $P(x, E, z, t)$ satisfait à l'équation de Chapman-Kolmogoroff:

$$P(x, E, s, t) = \int_W P(y, E, u, t) P(x, dA y, s, u), \quad s \leq u < t \quad (1)$$

et à un certain nombre d'autres conditions, indiquées par l'auteur, dont nous n'écrivons ici que la suivante: $P(x, x, s, t) \rightarrow 1$, si $t \rightarrow s$.

L'auteur montre que P est déterminée par ces conditions et il donne une série infinie qui exprime P . Cette série est analogue à celle qui a été employée par B. Pospíšil dans son travail sur l'équation (1) (ce Zbl. 13, 203). B. Hostinský (Brünn).

Onicescu, Octav, et Gh. Mihoc: Sur l'application des équations fonctionnelles de Chapman et Smoluchowsky dans la théorie des chaînes de Markoff. Bull. Sect. Sci. Acad. Roum. 21, 110—112 (1939).

Soient x_1, x_2, \dots, x_n des variables aléatoires liées en une chaîne simple de Markoff; nous supposons que $-1 < x_i < +1$, $i = 1, 2, \dots, n$. La probabilité d'avoir $y \leq x_n \leq y + dy$ après avoir eu $x_{n-1} = x$ est donnée par $\varphi(x, y) dy$ avec les conditions

$$\varphi(x, y) \geq 0, \quad \int_{-1}^{+1} \varphi(x, y) dy = 1.$$

Désignons par $P_n(x, y; s) ds$ la probabilité pour que la somme $x_1 + x_2 + \dots + x_n$ soit comprise entre s et $s + ds$. La fonction caractéristique $F_n(x, y; t)$ de P_n , c'est à dire

$$F_n(x, y, t) = \int_{y-n+1}^{y+n-1} P_n(x, y, s) e^{st} ds,$$

satisfait à l'équation (équation de Smoluchowski)

$$F_n(x, y; t) = \int_{-1}^{+1} F_m(x, z, t) F_{n-m}(z, y; t) dz,$$

ou à une équation plus générale, si $\varphi(x, y)$ dépend de n . B. Hostinský (Brünn).

Franckx, E.: La théorie des chaînes de Markoff. Étude du cas régulier. Skand. Aktuarie Tidskr. 22, 200—210 (1939).

By the well-known argument due to A. Markoff, criterions are obtained for the regular (and the positive regular) cases of the simple Markoff chain with a finite number of possible states. The results are modifications of the known ones. Cf. M. Fréchet's book (this Zbl. 18, 413). Kosaku Yosida (Osaka).

Kakutani, Shizuo: Some results in the operator-theoretical treatment of the Markoff process. Proc. Imp. Acad. Jap. 15, 260—264 (1939).

Soit t un point dans Ω et E un ensemble dans Ω . La probabilité $P(t, E)$ pour qu'un point qui se trouve en t soit transporté à un point de E dans l'unité de temps satisfait aux conditions $P(t, E) \geq 0$, $P(t, \Omega) = 1$. Supposons que $P(t, E)$ est complètement additive pour les ensembles de Borel E , si t est fixe et que $P(t, E)$ est

mesurable par rapport à t , si E est fixe. Il s'agit de rechercher l'allure asymptotique, pour grandes valeurs de n , de la probabilité $P^{(n)}(t, E)$ pour que le point soit transporté de t à E dans n unités de temps. L'auteur suppose qu'il y a un entier m et un opérateur linéaire (complètement continu) V qui transforme l'espace de Banach formé par toutes les fonctions additives $x(E)$ en lui même, et que $\|T^m - V\| < 1$ où T est l'opérateur $y(E) = \int_{\Omega} x(dt) P(t, E)$. En utilisant son travail sur la décomposition de T^n

[Proc. Imp. Acad. Jap. **14**, 287 (1938); ce Zbl. **19**, 414; voir aussi S. Kakutani, ibid. 295; ce Zbl. **19**, 416] il montre que $\lambda = 1$ est une valeur caractéristique de T et qu'il existe une fonction $P_1(t, E)$ telle que $P_1(t, E) \geq 0$, $P_1(t, \Omega) = 1$, $\int_{\Omega} P_1(t, ds) P_1(s, E) = P_1(t, E)$

et que borne supérieure de $\left| \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n P^{(m)}(t, E) - P_1(t, E) \right| \leq \frac{M}{n}$, $n = 1, 2, \dots$, M étant

une constante. Il étudie différentes expressions de la fonction P_1 . *B. Hostinský.*

Halmos, Paul R.: Invariants of certain stochastic transformations: The mathematical theory of Gambling systems. Duke math. J. **5**, 461—478 (1939).

Let Ω be the space of all infinite sequences $\omega = \{x_1, x_2, \dots\}$, where $x_i \in \Omega_1$ (Ω_1 is a certain fixed space, $i = 1, 2, \dots$), such that $x_i = x_i(\omega)$ ($i = 1, 2, \dots$) constitute independent chance variables with the same distribution functions. A system is a sequence $\{f_n\}$ of measurable functions on Ω satisfying (I) $f_1(\omega) \equiv 0$ or $\equiv 1$, (II) $f_n(\omega)$ ($n > 1$) depends only on x_1, x_2, \dots, x_{n-1} , (III) $f_n(\omega)$ ($n = 1, 2, \dots$) takes only the values 0 and 1, (IV) $\text{mes} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(\omega) = 1 \right) = 1$. The system transformation T is defined by $T(x_1, x_2, \dots) = \{x'_1, x'_2, \dots\} = \{x_{a_1}, x_{a_2}, \dots\}$, where $a_n(\omega)$ is the lowest integer satisfying $\sum_{m=1}^{a_n} f_m(\omega) = n$. According to J. L. Doob (see, for example, E. Hopf:

Ergodentheorie. p. 56; this Zbl. **17**, 283), any system transformation T is measure-preserving in the sense that for any measurable set $E' \subseteq \Omega$, the set $E = E\{T(\omega) \in E'\}$ is also measurable and $\text{mes}(E) = \text{mes}(E')$. Hence, by appealing to the Birkhoff-Khinchine's ergodic theorem, the following theorem is obtained (cf. E. Hopf: loc. cit.): Let T_1, T_2, \dots be any sequence of system transformations of Ω and put $T_n(x_1, x_2, \dots) = \{x_1^n, x_2^n, \dots\}$, then there exists a set Z of measure zero on Ω such

that $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N g_E(x_j^n) = \text{mes}(E)$ ($n = 1, 2, \dots$) for any $\omega = \{x_1, x_2, \dots\} \in \Omega - Z$

and for any Jordan measurable set E on Ω_1 [$g_E(x)$ denotes the characteristic function of E]. It may be considered as a mathematical interpretation of the „Regellosigkeit“ postulated in the collective theory of R. von Mises; as is well known, other interpretations were given by Copeland and Wald. The theorem states the in-

variance of the mean $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N g_E(x_j)$ by the system transformations T_1, T_2, \dots

Other theorems of invariance (by system transformation) are also obtained; the invariance of the conditional expectation, the invariance of asymptotic independence (the notion introduced by the author) etc. It is noted that the invariance of a. i. constitutes an extension of the Doob's theorem quoted above. *Kôsaku Yosida.*

Kryloff, N., et N. Bogoliùboff: Sur quelques problèmes de théorie ergodique de systèmes stochastiques. Ann. Chaire Phys. Math., Kiev **4**, 243—287 (1939) [Ukrainisch].

Les auteurs analysent quelques problèmes relatifs au développement d'un système physique figuré dans l'espace de phases Ω , si les probabilités de passage sont données. Soit x un point de Ω et A un domaine dans Ω . La probabilité pour que le point mobile (qui représente l'état actuel du système) passe de la position donnée x dans une autre

comprise dans A en t secondes est égale à $P_t(x, A) = \int_A K_t(x, y) m(dy)$ (1), où $m(dy)$ désigne la mesure de l'élément dy de A et K_t est une fonction donnée satisfaisant aux conditions $K_t(x, y) \geq 0$, $\int_{\Omega} K_t(x, y) m(dy) = 1$ (2). Les théorèmes généraux, démontrés dans ce travail, se rattachent aux valeurs moyennes des expressions de la forme

$$\frac{1}{T} \int_0^T f(x_t, x_{t+\tau_1}, \dots, x_{t+\tau_n}) dt, \quad 0 \leq \tau_1 \leq \tau_2 \leq \dots \leq \tau_n, \quad x_t \text{ désignant la position que}$$

prend à l'époque t un point qui se meut au hasard. Dans le cas où $n = 1$, l'application suivante est donnée de ces résultats généraux: Soit q l'élongation d'un point mobile M attiré par une force élastique constante vers la position $q = 0$ et $f(x_t)$ une force qui dépend, à l'époque t , de la position actuelle x_t d'un point N dans Ω ; la probabilité $P_t(x, A)$ de passage est déterminée par les formules (1) et (2). Le mouvement du point M est régi par l'équation $m \frac{d^2 q}{dt^2} + k \cdot q = f(x_t)$, où m et k sont des constantes; posons $\omega = \sqrt{k/m}$. La valeur moyenne de la fonction donnée $f(x_t)$ à l'époque t , si l'on suppose que le point N se trouve dans la position x à l'époque $t = 0$, est déterminée par la formule $E_x\{f(x_t)\} = \int_{\Omega} K_t(x, y) f(y) dy$. L'énergie du point M à l'époque t est égale à

$$W_t = \frac{1}{2} m \left(\frac{dq}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} k q^2. \quad \text{En posant}$$

$$\alpha(\omega|f) = 2 \int_0^{\infty} \left[\int_{\Omega} \int_{\Omega} f(x) f(y) \{K_{\vartheta}(x, y) - 1\} dx dy \right] \cos \omega \vartheta \cdot d\vartheta$$

on trouve le résultat suivant

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{E_x\{W(t)\}}{t} = \frac{1}{m} \alpha(\omega|f). \quad B. Hostinský (Brünn).$$

● Tschuprow, A. A.: Principles of the mathematical theory of correlation. Edinburgh: Hodge 1939. X, 194 pag. 12/6.

● Goulden, C. H.: Methods of statistical analysis. New York: John Wiley & Sons, Inc. 1939. 277 pag. u. 15 ill. \$ 3.50.

● Rider, P. R.: Introduction to modern statistical methods. London: Chapman & Hall, Ltd. 1939. IX, 220 pag. 13/6.

● Aitken, A. C.: Statistical mathematics. London: Oliver & Boyd, Ltd. 1939.

● Koller, Siegfried: Graphische Tafeln zur Beurteilung statistischer Zahlen. Dresden u. Leipzig: Theodor Steinkopff 1940. 73 S., 15 Taf. u. 6 Abb. geb. RM. 10.—.

Immer mehr durchdringt die Statistik sämtliche Gebiete der Wissenschaft und des praktischen Lebens; Naturwissenschaftler, Mediziner, Psychologen, Landwirtschaftler, Volkswirtschaftler, Techniker, Versicherungswissenschaftler usw. sind in stets steigendem Maße auf die statistische Methode angewiesen — doch im selben Maße wächst die Gefahr, daß die Anwendung letzterer in unkritisches, schematisches Berechnen gewisser gebräuchlicher Maßzahlen entarte und unbewußt dazu mißbraucht werde, „alles zu beweisen“. Dieser Fehlentwicklung zu steuern, ist das eine Ziel der Kollerschen Tafelsammlung. Die Berechnung statistischer Zahlen aus irgendeinem Material ist meist nicht Endziel, sondern nur Vorbereitung; das Wesen der statistischen Methode besteht, wie Verf. auch in zahlreichen anderen Arbeiten unermüdlich betont, in der Beurteilung der statistischen Zahlen. Gerade diese führt aber in den meisten Fällen auf recht unübersichtliche Formeln, die einerseits häufig den Bearbeiter statistischen Materials mit Recht abschrecken, andererseits in der Literatur vielfach durch unrichtige verdrängt werden. Diesem Mißstand hilft Verf. verdienstvollerweise durch die Konstruktion graphischer Tafeln ab, mittels welcher der Bearbeiter ohne Kenntnis der diesen zugrunde liegenden Formeln durch einfaches Ablesen die von ihm gewonnenen statistischen Zahlen einwandfrei beurteilen kann. Diesem Zweck werden graphische Tafeln auf geringstem Raum weit besser gerecht als die sonst bisher ausschließlich üblichen (Vorschläge für die graphische Behandlung einzelner statistischer Probleme fanden sich nur ganz vereinzelt) umfangreichen und unhandlichen Zahlentabellen, da sie auch für Zwischenwerte einfache Abschätzung ohne jegliche rechnerische Interpolation gestatten. Die Tafelsammlung ist keineswegs ein Lehrbuch der Statistik. Die unentbehrliche grundsätzliche sowie technische Vorbereitung

zur Benutzung der Tafeln gibt Verf. in der Einleitung. Dort werden zunächst kurz die Hauptmaßzahlen und ihre Berechnung, dann die theoretischen Grundbegriffe erklärt und eingehend der logische Kern jeglicher Zahlenprüfung, insbesondere des statistischen Vergleichs, deutlich gemacht. Auch die besonderen Verfahren der Korrelationsrechnung und der Streuungszzerlegung werden in der Einleitung vorweggenommen. Für den eigentlichen Tafelteil ist folgende Anordnung gewählt: links: Fragestellung, Antwort, Erklärung der Ablesung, Erläuterung an Beispielen; rechts: Tafel; folgende Seite: mathematische Begründung, kann ohne Schaden übergangen werden. Zur Anwendung kommen hauptsächlich Fluchtlinientafeln, Netztafeln und Doppelskalen. Durch geeignete Transformationen hat Verf. bei allen Tafeln erreicht, daß sie bis hinab zur kleinsten Statistik über wenige Fälle ihre Gültigkeit bewahren. Bei allen Tafeln ist wohl die für das unbewaffnete Auge größtmögliche Genauigkeit erreicht. Um dem Benutzer die Verwendung des Rechenschiebers zu ersparen, sind einige Hilfsrechentafeln vorangeschickt. Sämtliche Tafeln sind in allen Anwendungsgebieten verwendbar und behandeln, großenteils nach den Methoden der modernen englischen, insbesondere der Fisherschen Schule, die Hauptfragen der Zahlenkritik. Die Abgrenzung des Zufallsbereiches wurde einheitlich auf der der 3σ -Regel bei der Normalverteilung äquivalenten Zufallsziffer 0,27 % aufgebaut. Ganz besondere Sorgfalt hat Verf. auf die Auswahl reichhaltiger und mannigfaltiger Zahlenbeispiele verwandt, die den verschiedensten Anwendungsgebieten, und zwar meist der Praxis, entnommen sind und den Gebrauch der Tafeln jedem nahe bringen. Inhalt: Einleitung: a) Häufigkeitsverteilung, Mittelwert, mittlere Abweichung, b) der statistische Vergleich, c) theoretische Grundbegriffe, d) Abgrenzung des Zufallsbereiches, e) Korrelationsrechnung, f) Streuungszzerlegung; I. Rechentafeln: 1. Multiplikation, a) Übersicht, b) Feineinteilung, 2. Quadrate und Quadratwurzeln; II. Die Beurteilung von Häufigkeitsziffern: 3. Prüfung einer Grundwahrscheinlichkeit an einer Beobachtungsreihe (direkter Schluß), 4. Rückschluß von einer Beobachtungsreihe auf die unbekannte Grundwahrscheinlichkeit, 5. Vergleich der in zwei Reihen gleicher Größe beobachteten Häufigkeiten, 6. Vergleich der in zwei Reihen ungleicher Größe beobachteten Häufigkeiten; III. die Beurteilung von Messungsreihen: 7. Fehlerbereich von Mittelwerten, 8. mittlerer Fehler der Differenz zweier Mittelwerte, 9. Beurteilung von Häufigkeitsverteilungen (χ^2 -Tafel); IV. Die Beurteilung von Zusammenhängen: 10. Vorhandensein einer (geradlinigen) Zu- oder Abnahme (Richtungskoeffizient $R \neq 0$?), Vorhandensein eines Zusammenhanges (Korrelationskoeffizient $r \neq 0$?), 11. Weitere Beurteilung von Korrelationskoeffizienten, a) Hilfstafel (Umrechnung von r in die Korrelationsziffer z), b) Unterschied zweier Korrelationsziffern, 12. Berechnung partieller Korrelationskoeffizienten, 13. Streuungszzerlegung (nach R. A. Fisher); V. Anhang: die Normalverteilung: 14. Ordinaten, 15. Flächenwerte (Wahrscheinlichkeiten).

M. P. Geppert (Bad Nauheim).

Eisenhart, C.: The interpretation of certain regression methods and their use in biological and industrial research. Ann. math. Statist. 10, 162—186 (1939).

An extended exposition aiming to explain regression methods to the "practical man", and to bring the statistical theorist to a fuller appreciation of the practical problems arising in biological studies and industrial production.

Albert A. Bennett (Providence).

Bartlett, M. S.: Complete simultaneous fiducial distributions. Ann. math. Statist. 10, 129—138 (1939).

A brief exposition (with ample bibliographic references) of the theory of fiducial distributions leading up to the idea of complete fiducial distributions. A brief comment is made supplementing the Starkey investigation of the distribution related to the Behrens-Fisher test of the difference between two means from normal populations with unequal variances. Criticism is directed at the validity of Fisher's fiducial argument for non-dependence on the population variance.

Albert A. Bennett (Providence).

David, F. N.: On Neyman's „smooth“ test for goodness of fit. I. Distribution of the criterion ψ^2 when the hypothesis tested is true. Biometrika 31, 191—199 (1939).

The author explains the nature of Neyman's "smooth" test (the ψ^2 criterion) for goodness of fit, the reason for its proposed use due to the inadequacy of the Chi-square test when deviations from expected values are consecutively of one sign, and the problem of "order of the test" which calls for preliminary decision. Graphs and tables are given for the distribution of ψ^2 . While the first four moments are examined, detailed computation is confined to the second and third moments. A concluding section points out that much work seems to be called for before this test can be expected to supplant the Chi-square test in common use. For a quite small sample the new test is hardly appropriate, its theoretical usefulness being designed for the case of samples of twenty or more, but for a sample of size greater than a hundred, the labor involved in computation by present methods is a practical barrier to its adoption.

Albert A. Bennett (Providence).

Brown, George W.: On the power of the L_1 test for equality of several variances. Ann. math. Statist. 10, 119—128 (1939).

As yet the problem of testing simultaneously for means and variances for k samples

known to be from normal universes is in an unsatisfactory status. The L_1 criterion of Neyman and Pearson is appropriate for testing the assumption of equal variance prior to testing for the means. The general distribution of the criterion when the hypothesis of equal variances is true has been handled by Neyman and Pearson (1931), when it is not true by Wilks and Thompson (1937). This paper shows that while the test is biased for small unequal numbers of observations in the several samples, yet when these numbers are equal the test is unbiased, and for bounded ratios among these numbers and for constant probability level, the test remains asymptotically unbiased in general. A qualitative idea of the sharpness of the L_1 test may be obtained from some values here computed and graphed for a few selected cases when $k = 2$.
Albert A. Bennett (Providence).

Morgan, W. A.: A test for the significance of the difference between the two variances in a sample from a normal bivariate population. *Biometrika* 31, 13—19 (1939).

A sample of n pairs of variables (x, y) having been drawn from a bivariate normal distribution, D. J. Finney (1938) sought for the probability law of the ratio $\omega = s_1^2/s_2^2$, and obtained a test dependent upon the population correlation ρ_{12} , which will be in general unknown. The present paper concerns the same problem but follows the likelihood ratio method of approach of Neyman and Pearson, resulting in a test which unlike Finney's is a function of the sample correlation coefficient r_{12} as well as s_1^2 and s_2^2 , but is independent of the (unknown) population correlation ρ_{12} . Using F. N. David's Tables, computations for the case $n = 25$ are carried out showing the power function of the test, the results being exhibited in a graph. Tables are computed comparing the powers of the two tests for those rare cases in which ρ_{12} is supposed to be known. To three decimal places the close agreement between the two methods is striking, although the ω test is slightly the better in situations where the chance of detection of a difference becomes larger than 0.5.
Albert A. Bennett (Providence).

Pitman, E. J. G.: Tests of hypotheses concerning location and scale parameters. *Biometrika* 31, 200—215 (1939).

By methods of great generality the author examines problems concerning comparison of location and of scale parameters. If k observed numbers x_1, \dots, x_k are values of k chance variables, and if the elementary probability function of their simultaneous distribution is given $F(x_1 - a_1, \dots, x_k - a_k)$ where F is of known form, but the values of the location parameters, a_1, \dots, a_k , are unknown, the author shows that then the test based on $J = \int_{-\infty}^{+\infty} F(x_1 - a, \dots, x_k - a) da$ will be unbiased. Gamma variables are introduced, defined by having (in the case of unscaled $\Gamma(m)$ variables, with scale parameter c) the elementary probability function $e^{-x} x^{m-1}/\Gamma(m)$, on the range for x from 0 to $+\infty$. Tables (to five decimal places) are computed to exhibit the comparison between true and approximate probability integrals used in evaluating an appropriate criterion L for the hypothesis that the variances of the normal populations from which given samples have been drawn, are all the same. — Applications are made, showing that Bartlett's test is unbiased, while the Neyman-Pearson test is biased save for samples all of the same size.
Albert A. Bennett (Providence).

Stock, J. Stevens, and Lester R. Frankel: The allocation of samplings among several strata. *Ann. math. Statist.* 10, 288—293 (1939).

The problem of selecting a random sample so as to obtain optimum precision has been the subject of much statistical research. It is often profitable to stratify the universe into several homogeneous parts and then to sample at random within each of these parts. The problem in some cases is to obtain general statistics for the total population. However in the present paper the inquiry concerns the distribution of observations among several well defined strata so that each area will be represented with equal precision. Two methods of solution are explained and brief remarks relative to accuracy and scope of application are made for each. Where the object of research is merely to draw contrasts between strata, the number of samplings from each stratum should be approximately proportional to the standard deviations irrespective of the size of the various strata.
Albert A. Bennett (Providence).

Newman, D.: The distribution of range in samples from a normal population, expressed in terms of an independent estimate of standard deviation. *Biometrika* 31, 20 bis 30 (1939).

Tippett (in 1925) prepared tables of the mean range within samples all taken from a normal population in terms of the population standard deviation. This step has proved the incentive for a considerable amount of computational work with the object of making use of the range of a sample rather than its sum of squares, for rapidly

estimating σ . Following a suggestion of "Student", a study is here made of the sampling distribution of $q = w/s$, where w is the range in a sample of n observations from a normal population with (unknown) standard deviation σ , and s^2 is an independent and unbiased estimate of σ^2 based on f degrees of freedom. Basic frame-work values are computed, and by interpolation tables for the 5 and 1% points in terms of 12 values of n , and 21 values of f , are here obtained and published. These tables rest to some extent on an empirical basis. Instances are worked out illustrating their ease of application.

Albert A. Bennett (Providence).

Biomathematik, Finanz- und Versicherungsmathematik:

● D'Ancona, Umberto: Der Kampf ums Dasein. Eine biologisch-mathematische Darstellung der Lebensgemeinschaften und biologischen Gleichgewichte. Übers. v. Ludwig Holzer. (Abh. z. exakt. Biol. Neue Folge d. „Abh. z. theoret. Biol.“ Hrsg. v. Ludwig v. Bertalanffy. H. 1.) Berlin: Gebr. Bornträger 1939. X, 196 S. u. 46 Abb. RM. 12.—.

Während die bisher vorliegenden Monographien biomathematischen Inhalts hauptsächlich der Erbmathematik, d. h. der wahrscheinlichkeitstheoretischen Entwicklung der Erbgesetze und den mathematisch-statistischen Methoden zur Ermittlung von Erbeigenschaften gewidmet sind, gibt das vorliegende Buch eine bereits weit entwickelte mathematische Umwelttheorie unter besonderer Berücksichtigung der Arbeiten von Volterra. — Es werden zunächst an Hand zahlreicher biologischer Beispiele die Grundbegriffe der Ökologie besprochen, vor allem die Begriffe der Lebensgemeinschaft und des biologischen Gleichgewichts der an einer Lebensgemeinschaft teilnehmenden Partner. Es folgt eine Darstellung der ersten Versuche zu einer mathematischen Analyse biologischer Gleichgewichte, z. B. die Erklärung des Verlaufes einer Malariaepidemie, wobei mehr und mehr die das Gleichgewicht beeinflussenden Faktoren, z. B. die Immunisierung, Berücksichtigung finden. Nach einem Referat über allgemeinere Untersuchungen von Lotka wird mit der ausführlichen Entwicklung der mathematischen Theorie des Kampfes ums Dasein von Volterra begonnen. — Der einfachste Fall liegt vor, wenn eine einzige Tier- oder Pflanzenart isoliert in einer unveränderlichen Umgebung lebt. Die Zahl N der lebenden Individuen wird als stetig differenzierbare Funktion der Zeit t angenommen. Ist dann n die Geburts- und m die Sterblichkeitsziffer, also $\varepsilon = n - m$

der zunächst konstant vorausgesetzte Wachstumskoeffizient, so besteht die Gleichung $\frac{dN}{dt} = \varepsilon N$ mit der Lösung $N = N_0 e^{\varepsilon(t-t_0)}$ (N_0 die Anzahl der Individuen zur Zeit t_0), welche das Gesetz von Malthus enthält. Je nachdem $\varepsilon >$ oder < 0 ist, wächst die Bevölkerung oder sie stirbt aus. — Es folgt der Fall eines mit wachsender Zahl der Lebewesen linear abnehmenden Wachstums-

koeffizienten $\varepsilon - \lambda N$ ($\lambda > 0$) an Stelle von ε . Die dann bestehende Gleichung $\frac{dN}{dt} = (\varepsilon - \lambda N) N$ hat eine Lösung von der Form $N = \frac{b e^{\varepsilon t}}{1 + c e^{\varepsilon t}}$ (Gleichung der logistischen Kurve von Verhulst-

Pearl), welche für $\varepsilon > 0$ mit wachsender Zeit zu einem endlichen Grenzwert für die Bevölkerungszahl führt. Es zeigt sich, daß dieses theoretische Ergebnis mit dem Wachstum einer *Drosophila*-population außerordentlich gut übereinstimmt. Diese hier als Beispiele genannten Ansätze werden fortlaufend verallgemeinert. Die Berücksichtigung der Intoxikation des Nahrungsbodens führt z. B. auf eine Integro-Differentialgleichung, die näherungsweise gelöst wird. Die Berücksichtigung der Paarungsmöglichkeiten ergibt schließlich 5 verschiedene Fälle, wobei in 2 Fällen die Bevölkerung ausstirbt, während in 3 Fällen die Bevölkerungszahl wieder einem Grenzwert zustrebt. — Die Gemeinschaft zweier Arten, die sich die Nahrung streitig

machen, führt auf das System von Differentialgleichungen $\frac{dN_1}{dt} = [\varepsilon_1 - \gamma_1(h_1 N_1 + h_2 N_2)] N_1$, $\frac{dN_2}{dt} = [\varepsilon_2 - \gamma_2(h_1 N_1 + h_2 N_2)] N_2$, wobei je nach der Art der Konstanten ein Gleichgewichts-

verhältnis bestehen bleibt oder die eine Bevölkerung ausstirbt. Die Diskussion der Gemeinschaft zweier Arten, bei der die Individuen der einen Art die der anderen fressen, führt erstmals zu dem interessanten Fall, daß die beiden Bevölkerungszahlen periodische Schwingungen (Fluktuationen) ausführen. In entsprechender Weise werden die Gemeinschaften einer beliebigen Anzahl von Arten behandelt. Das Ergebnis ist eine biologische Dynamik, welche der Dynamik der Massensysteme vergleichbar ist. Weitere Untersuchungen betreffen die Abhängigkeit des Wachstumskoeffizienten von der Zahl der Individuen, ferner Störungen, die durch Einführung von Individuen einer neuen Art oder durch Einwanderungsströme erzeugt werden u. a. Schließlich werden experimentelle Bestätigungen der entwickelten Theorie ausführlich besprochen.

F. Ringleb (Angsburg).

Giaccardi, F.: Di un tentativo di rappresentazione analitica dello sviluppo in peso dell'organismo umano. Atti Accad. Sci. Torino 74, 459—469 (1939).

Die Interpolation organischer Vorgänge, wie sie z. B. die Pearsonsche Schule betrieb, beabsichtigt nur eine knappe formelmäßige Darstellung dieser Vorgänge ohne tieferes Eingehen auf ihren Mechanismus. Die vorliegende Arbeit interpoliert in diesem Sinne das durchschnittliche Gewicht $p(x)$ des menschlichen Körpers. Die Interpolationsformel lautet:

$$\bar{p}(x) = \sum_{k=1}^3 \frac{a_k}{\sqrt{2\pi m_k}} \int_{-\frac{x}{m_k}}^{\frac{x-x_k}{m_k}} e^{-\frac{(\tau-x_k)^2}{2m_k}} d\tau,$$

wobei x die Zeit in Jahren bedeutet und a_k, m_k, x_k Konstanten sind, die nach der Methode der kleinsten Quadrate durch die Forderung

$$\mu = \sum_{i=1}^n [p(x_i) - \bar{p}(x_i)]^2 = \min$$

bestimmt werden. Die Wachstumsgeschwindigkeit wird also aus 3 positiven Summanden, Gaußkurven, aufgebaut. Man kann danach 3 Entwicklungsperioden unterscheiden, die für mitgeteiltes empirisches Material von Quételet und von Pagliani bei $x_1 \approx 0,3$, $x_2 \approx 7$, $x_3 \approx 15$ J. liegen. Kurvendarstellungen und Zahlentafeln. *Theodor Zech.*

Fisher, R. A.: Stage of development as a factor influencing the variance in the number of offspring, frequency of mutants and related quantities. Ann. of Eugen. 9, 406—408 (1939).

Die Auszählung eines Merkmals kann je nach dem Entwicklungsstadium der vorliegenden Individuen verschiedene Resultate liefern. Viele Individuen erzeugen z. B. mehr Nachkommen, als geschlechtsreif werden. Die nicht geschlechtsreifen Nachkommen werden als Larven bezeichnet. Es wird angenommen, daß eine von n Larven die Geschlechtsreife erlebt. Die Wahrscheinlichkeit, daß x Larven erzeugt werden, ist $e^{-2n} \frac{(2n)^x}{x!}$ (Poissonsche Reihe mit der Erwartung $2n$). Die Wahrscheinlichkeit, daß von einer beliebigen Anzahl x genau y die Geschlechtsreife erleben, ist $\frac{x!}{y!(x-y)!} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{x-y} \left(\frac{1}{n}\right)^y$. Die totale Wahrscheinlichkeit, daß y Individuen die Geschlechtsreife erleben, ergibt sich zu $e^{-2} \frac{2^y}{y!}$. Die Frage nach der Verteilung der bei dem Stadium der Geschlechtsreife ausgezählten Anzahl der Nachkommen ergibt für den Fall, daß keine Larve die Geschlechtsreife erreicht, die Wahrscheinlichkeit $1 - \frac{1}{n} e^{-2n}$ und für den Fall $x > 0$ des Überlebens der Geschlechtsreife die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{n} e^{-2n} \frac{(2n)^x}{x!}$. Weiterhin wird die Streuung von x zu $4n - 2$ bestimmt. Die Arbeit beschließen Folgerungen aus den gewonnenen Ergebnissen. *F. Ringleb (Augsburg).*

Haldane, J. B. S.: The spread of harmful autosomal recessive genes in human populations. Ann. of Eugen. 9, 232—237 (1939).

Die Arbeit verfolgt die Wirkung einer plötzlichen Verringerung des Inzuchtkoeffizienten α einer Bevölkerung (wie sie praktisch als Folge der Verstädterung bei den Kulturvölkern eintritt) auf die Häufigkeiten schädlicher oder letaler rezessiver Gene. Der Abnahme der entsprechenden Phänotypen folgt ein langsames Anwachsen ihrer Häufigkeiten, das mindestens 100 Generationen bis zur Erreichung des Gleichgewichts andauert. Dieses häufig beobachtete Anwachsen sowie das Überwiegen dominanter Abnormitäten gegenüber rezessiven sind also als Folge der schnellen Abnahme von α zu erklären. *Harald Geppert (Berlin).*

Haldane, J. B. S., and Pearl Moshinsky: Inbreeding in Mendelian populations with special reference to human cousin marriage. Ann. of Eugen. 9, 321—340 (1939).

Bekanntlich äußert sich der Einfluß der Verwandtenehen bei seltenen rezessiven Merkmalen darin, daß ein hoher Prozentsatz der Merkmalsträger solchen Ehen entstammt. Die Verff. berechnen die erwartungsmäßige Zusammensetzung der Nachkommenschaft aller praktisch wichtigen Typen von Verwandtenehen bei einortigen und vollständig oder unvollständig geschlechtsgebundenen Genpaaren und untersuchen den Einfluß auf die Häufigkeit der Merkmalsklassen in der Bevölkerung. *Harald Geppert (Berlin).*

Haldane, J. B. S.: The equilibrium between mutation and random extinction. *Ann. of Eugen.* 9, 400—405 (1939).

Landahl, H. D.: A contribution to the mathematical biophysics of psychophysical discrimination. II. *Bull. math. Biophysics* 1, 159—176 (1939).

Stern, Erich: Kursformeln für Anleihen mit gleichmäßig gestaffeltem Zins. *Verzeckerings-Arch.* 20, 131—146 (1939).

Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, möglichst einfach zu handhabende Formeln für die folgenden Anleihetypen zu ermitteln: Anleihenominale sei 1, Nominalzinsfuß zu Beginn 100 i %; dieser Zinsfuß steige jährlich um 100 $\frac{i}{p}$ %; der tatsächliche Zinsfuß sei 100 r %.

1. Wird die Anleihe in n gleichen nachschüssigen Tilgungsbeträgen $\left(\frac{1}{n}\right)$ getilgt und dekursiv verzinst, so wird für den Kurs nach m Jahren gefunden:

$$m^x = \left[pr + mr + 2 + \frac{a_{n-m}}{n-m} \left(\frac{pr^2}{i} - nr - pr - r - 2 \right) \right] \frac{i}{pr^2}.$$

2. Wird jedoch der Schuldrest nach t Jahren auf einmal getilgt, so ergibt sich als Begebungskurs:

$$x' = \left[pr + \frac{t}{n} + 1 + \frac{a_t}{n} \left(\frac{pr^2}{i} - tr - pr - r - 2 \right) + \frac{n-t}{n} v' \left(\frac{pr^2}{i} - tr - pr - 1 \right) \right] \frac{i}{pr^2}.$$

3. Falls die obige Anleihe durch eine einmalige Zahlung nach n Jahren Laufzeit getilgt wird, so ist der Begebungskurs: $x'' = v^n + \frac{i}{pr} [a_n(nr + pr + 1) - n]$. *F. Knoll (Wien).*

Meidell, Birger: Zur Theorie und Praxis der Berechnung des effektiven Zinsfußes bei Anleihen. *Skand. Aktuarie Tidskr.* 22, 122—151 (1939).

Meidell hat in früheren Arbeiten (vgl. dies. Zbl. 11, 409; 20, 45) bereits Näherungslösungen der obigen Fragestellung gegeben; da diese Formeln nicht in allen Fällen befriedigten, sucht er in der vorliegenden Arbeit zunächst durch Heranziehen der Lagrangeschen Reihenformel zu einer weitertragenden Arbeitsformel zu gelangen; bezeichnet man die Tilgungsbeträge mit F_t und setzt:

$$\begin{aligned} \Sigma_0 &= \sum_{t=1}^n F_t \left(1 + \frac{i_1}{K}\right)^{-t}, & \Sigma_1 &= \sum_{t=1}^n F_t \cdot t \left(1 + \frac{i_1}{K}\right)^{-t-1} \\ \Sigma_2 &= \sum_{t=1}^n F_t t(t+1) \left(1 + \frac{i_1}{K}\right)^{-t-2}, \end{aligned}$$

sowie $i = i_1 \cdot \frac{z-1}{z-K}$, so erhält man

$$i = \frac{i_1}{K} \left[1 + \frac{1-K}{K} \Sigma_0 + \frac{1-K}{K^2} \Sigma_0 \cdot \left(\Sigma_0 - i_1 \frac{1-K}{K} \Sigma_1 \right) \right] \dots$$

und

$$z = \Sigma_0 - \frac{1-K}{K^2} i_1 \Sigma_0 \Sigma_1 + \left(\frac{1-K}{K^2} i_1 \right)^2 \Sigma_0 \left(\Sigma_1^2 + \frac{1}{2} \Sigma_0 \Sigma_1 \right) - \frac{i_1(1-K)}{K^3} \Sigma_0^2 \Sigma_1 \dots$$

Eingehende Konvergenzuntersuchungen zeigen, daß die Formeln in den meisten in der Praxis vorkommenden Fällen brauchbar sind, in einzelnen Fällen ist jedoch die Konvergenz zu langsam. Eine weitere sehr zweckmäßige Formel erhält man, wenn man K nach Potenzen von $(i - i_1)$ entwickelt und nach dem Gliede zweiter Ordnung abbricht; die Formel muß in der Arbeit selbst eingesehen werden. Die Formel wird nach den verschiedensten Gesichtspunkten überprüft und auch in Tabellen hinsichtlich ihrer numerischen Brauchbarkeit untersucht. *F. Knoll (Wien).*

● **Beiträge zur Bausparkmathematik.** Im Auftrage der Fachgruppe Private Bausparkassen. Hrsg. v. Rolf Lüders. Berlin: Curt Hermann Weise Verl. 1939. 83 S. RM. 3.—.

Elementar gehaltene Darstellung der Hauptgebiete der Bausparkmathematik, die sich im wesentlichen auf die aktuellen Probleme beschränken, die durch die Bausparkassenreform in den Jahren 1938—1939 entstanden sind. Es werden hauptsächlich die für die Praxis der Bausparkassen wichtigen Fragen erläutert. *W. Simonsen.*

Hagstroem, K. G.: Rilievi sulla teoria del deprezzamento. Giorn. Ist. Ital. Attuari 10, 193—212 (1939).

An dem Beispiele der Entwertung eines Bauwerkes werden die Begriffe und Formeln entwickelt. Bezeichnet man mit a den Bodenwert, mit b den Neuwert des Hauses, mit s die Gesamtlebensdauer des betreffenden Objekttyps, mit t das Alter im Augenblick der Schätzung, mit h die reine Rente des Besitzes abzüglich der Auslagen und Erhaltungskosten unter Ausschluß der Amortisation und setzt $v = (1+i)^{-1}$, $\bar{a}_{\overline{s}|i} = \delta^{-1}(1-v^s)$, $\delta = \log e^{(1+i)^{-1}}$, so gelangt man zu der Gleichung

$$a + b \frac{\bar{a}_{\overline{s-t}|i}}{\bar{a}_{\overline{s}|i}} + \int_0^{s-t} \left(h - a\delta - \frac{b}{\bar{a}_{\overline{s}|i}} \right) e^{-\delta w} dw = av^{s-t} + h\bar{a}_{\overline{s-t}|i}.$$

Bezeichnet man den Ausdruck auf der rechten Seite der Gleichung mit $V(t)$ und denkt man sich eine Versicherung gegen Wertminderung durchgeführt, so muß die Prämienreserve vermehrt um $V(t)$ gerade den Versicherungswert ergeben. Der Ausdruck für die Prämie, für das Deckungskapital bei konstanter „Sterblichkeitskraft“ des Gebäudes μ (mit dem Sonderfall $\mu = 0$) wird angegeben, die Differentialgleichung für das Deckungskapital bei veränderlichem μ_x aufgestellt und integriert und unter den allgemeineren Voraussetzungen die Verallgemeinerung der obigen Gleichung ermittelt, und ihre einzelnen Glieder werden analysiert. War bisher die Prämie gegen Wertminderung konstant angesetzt, so wird nunmehr die Prämie proportional $V(t)$ angenommen, unter dieser Voraussetzung die Differentialgleichung der Prämienreserve ermittelt und gelöst. Eine Tafel gibt einen numerischen Einblick in die verschiedenen Ergebnisse. In den anschließenden Ausführungen wird eine Brücke zu den Ausführungen von Hagström (dies. Zbl. 19, 130) über „Tausch“ geschlagen. F. Knoll (Wien).

Thurmann-Moe, J.: Die neuen norwegischen Rechnungsgrundlagen für Rentenversicherung, R 1939, und für Lebensversicherung, N 1939. Skand. Aktuarie Tidsskr. 22, 152—176 (1939).

Lukaes, Eugen: Zur Theorie der Selekttafeln. Skand. Aktuarie Tidsskr. 22, 223—236 (1939).

Es wird eine Theorie aufgestellt, die es gestattet, die Versichertensterblichkeit mit Hilfe von Funktionen zu beschreiben, die nur von einer Veränderlichen — dem Alter — abhängen. Das geschieht auf Grund der Hypothese, daß ein jeder Versicherungsbestand sich aus zwei verschiedenen Gruppen mit verschiedener Sterblichkeit zusammensetzt, den Selekten und den Defekten. Im ersten Teil der Arbeit wird gezeigt, daß drei Intensitäten, nämlich die Sterblichkeitsintensität der Selekten μ_x^{ss} , die Defektisierungsintensität μ_x^{sd} und die Sterbensintensität der Defekten μ_x^{ds} eine Selekttafel bestimmen. Die Bestimmung dieser Intensitäten wird durch Voraussetzung der Konvergenz der Selekttafel gegen eine Schlußtafel und mit Hilfe der Hypothese, daß die Ausscheideordnung der Defekten bei wachsendem Alter stärker abnimmt als die Ausscheideordnung der Selekten, ermöglicht. Dadurch werden die Intensitäten durch Funktionen ausgedrückt, die aus Sterblichkeitserfahrungen ermittelt werden können. Janko (Prag).

Richter, Hans: Die Konvergenz der Erneuerungsfunktion. Bl. Versich.-Math. 5, 21—35 (1940).

In dieser Arbeit werden Voraussetzungen gesucht, unter welchen die Erneuerungsfunktion $\varphi(x)$ oszillierend oder überhaupt gegen einen Grenzwert konvergiert. Wenn man eine Gesamtheit von Elementen betrachtet, die einer Ausscheidung gemäß einer Überlebenswahrscheinlichkeit $P(x)$ unterliegen, so wird gewöhnlich vorausgesetzt, daß $P(x)$ eine stetige, monoton nichtsteigende Funktion mit $P(0) = 1$ und $\lim_{x \rightarrow \infty} P(x) = 0$ ist. Der Autor untersucht ausführlich den Fall, in dem $P(x) = 0$ für $x > \omega$, wo ω ein endlicher Wert ist, ferner a) $P(x)$ keiner weiteren Einschränkung unterliegt, b) $P(x)$ stückweise differenzierbar mit stückweise stetiger Ableitung vorausgesetzt wird. Es wird gezeigt, daß in diesem praktisch wichtigsten Fall stets Konvergenz gegen einen Grenzwert stattfindet. Janko (Prag).

Franckx, E.: I capitali di sopravvivenza. Giorn. Ist. Ital. Attuari 10, 213—220 (1939).

In Fortführung einer früheren Arbeit (dies. Zbl. 21, 342) wird unter der Annahme, daß ein Sterblichkeitsgesetz p -ter Ordnung nach Quiquet vorliege, der Satz bewiesen, daß die verschiedenen Überlebensbarwerte sich als lineare Funktionen von $p + 1$ partikulären Integralen

$$\int_0^{\omega} v^t \varphi_i(t) \frac{l(x+t)}{l(x)} \dots \frac{l(u+t)}{l(u)} \dots dt$$

ausdrücken lassen, wobei ein Koeffizient beliebig wählbar ist. Die Frage der Koeffizientenbestimmung wird an anderer Stelle behandelt werden. Als weitere wichtige Folgerung ergibt sich, daß bei Geltung eines Quiquetschen Gesetzes p -ter Ordnung die Gesamtheit der Operationen „bis zum ersten Tode“ bei einer Gruppe von r Köpfen ($r > p$) durch ein lösendes System von nur p Operationen bestimmt ist. *F. Knoll.*

Luzius, Hans-Peter: Methode zur näherungsweisen Berechnung des Risikoreservefonds in der Lebensversicherung unter Benutzung der Momente. Berlin: Diss. 1937 (1938). 37 S.

Verf. approximiert die Verteilung $V(x)$ der relativen Schäden x eines Lebensversicherungsbestandes derart, daß die Approximationsfunktion, deren Form

$$N(x) = \Phi(x) + \sum_{v=0}^n c_v \varphi^{(v)}(x) \text{ ist } \left(\Phi(x) = \pi^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^x \exp(-t^2) dt, \varphi(x) = \pi^{-\frac{1}{2}} \exp(-x^2) \right),$$

der Forderung genügt, daß $\int_{-\infty}^{\infty} [(V(x) - N(x)) \exp(\frac{x^2}{2})]^2 dx$ ein Minimum werden soll.

Die Approximationsfunktion $N(x)$ stimmt in den ersten $n+1$ Momenten mit denen der Verteilung $V(x)$ überein. — Die Resultate werden auf die Berechnung der Risikoreserve angewandt. *W. Simonsen (Kopenhagen).*

Rusting, F. H.: Eine Eigenschaft, die Berechnung von Barwerten für abnorme Risiken betreffend. Verzekerings-Arch. 20, 84—100 (1939) [Holländisch].

Ist $q'_x > q_x$ die Sterbewahrscheinlichkeit eines minderwertigen Lebens, so läßt sich der Barwert darstellen durch $A' = \sum_{s=0}^n c_s A_s$, wo für die Vorzahlen c_s gilt:

$$c_s = \frac{s p'_x}{s p_x} - \frac{s+1 p'_x}{s+1 p_x} \quad (0 \leq s \leq n-1), \quad c_n = \frac{n p'_x}{n p_x} \quad (s = n).$$

Verf. konnte aber nicht feststellen, ob diese Eigenschaft nicht schon anderweitig veröffentlicht ist. *Lorey (Frankfurt a. M.).*

Börlin, Walter: Gruppenweise Reserverechnung bei Verwendung von Selektions- und Dekremententafeln. Bern: Diss. 1939. 52 S.

Die Berechnung des Deckungskapitals nach Gruppen erwies sich bisher als ganz unpraktisch, wenn man Selektionstabellen benutzte. F. Borch hat ein Verfahren zur Vereinfachung bei doppelt abgestuften Tabellen entwickelt (Skand. Aktuarie Tidskr.

1936; dies. Zbl. 15, 169). Es beruht darauf, daß die Funktion $\varphi(x, t) = \frac{l_{x+t} - l_{[x]+t}}{l_x - l_{[x]}}$ sich als vom Alter x nahezu unabhängig erweist. Daran und an ein älteres Gruppenverfahren von Lidstone sowie an neuere Arbeiten von Jecklin (dies. Zbl. 18, 323) anknüpfend, entwickelt Börlin Verfahren, um alle aus einer Selektionstabelle abzuleitenden Größen nur mit Werten aus der Schlußtafel darzustellen; dabei legt er den Plan steigender Dividende mit Wartezeit zugrunde. *Lorey (Frankfurt a. M.).*

Castellani, M.: Vantaggi e svantaggi dell'assicurazione per gruppi. Giorn. Ist. Ital. Attuari 10, 300—303 (1939).

In einem knappen Bericht wird mitgeteilt, daß im „Seminario Attuariale“ untersucht wurde, welchen Einfluß Änderungen in der Wahrscheinlichkeit, Leistungen zu erhalten, Änderungen in den Leistungsklassen und Änderungen im Aufbau der Gruppe auf die natürliche Prämie haben; benützt wurde für die natürliche Prämie die Formel

$$P(t) = \int_{x_0}^{x_1} n(x, t) u(x, t) C(x, t) dx,$$

worin $n(x, t)$ die Gesamtheit der Versicherten im Alter x zur Zeit t , $u(x, t)$ die Wahrscheinlichkeit, Anspruch auf eine Leistung zu erlangen, $C(x, t)$ das Maß der Leistung bedeuten. Als Ergebnis werden eine Reihe von Ungleichungen für $P(t)$ erhalten.

F. Knoll (Wien).

Lordi, Luigi: Sulla decomposizione del premio nell'assicurazione vita. *Accad. Sci. Fis. e Mat. Napoli, Rend.*, IV. s. 9, 92—98 (1939).

Die Arbeit knüpft an den Versuch von M. Jacob [Sulle equazioni del premio di risparmio. *Giorn. Ist. Ital. Attuari* 8, 105—111 (1937); dies. *Zbl.* 16, 413], die Versicherungsprämie ohne Benutzung des Begriffs der Prämienreserve in Spar- und Risiko- prämie zu zerlegen, an. Durch Umformung der das Äquivalenzprinzip der Leistungen ausdrückenden Gleichung erhält Verf. im Falle einer beliebigen gemischten Lebens- versicherung eine Volterra'sche Integralgleichung 2. Art, die sich wegen der Spalt- barkeit des Kernels auf eine gewöhnliche lineare Differentialgleichung 1. Ordnung zurückführen läßt; die kontinuierliche Sparprämie $P_{(t)}^{(s)}$ genügt der Gleichung

$$S = \int_0^n P_{(t)}^{(s)}(t) \cdot e^{\int_0^t \varrho(\tau) d\tau} dt,$$

und aus ihr bestimmt sich die kontinuierliche Risikoprämie durch

$$P_{(t)}^{(r)}(t) = \mu(x+t) \cdot \left\{ U(t) - \int_0^t P_{(t)}^{(s)}(\sigma) \cdot e^{\int_0^t \varrho(\tau) d\tau} d\sigma \right\},$$

wobei S die im Erlebensfall nach n Jahren auszuzahlende Summe, $U(t)$ die im Augen- blick des Todes im Alter $x+t$ fällige Summe, $P(t) = P_{(t)}^{(s)} + P_{(t)}^{(r)}$ die Prämienintensität, x das Alter bei Beginn der Versicherung, $\mu(x+t)$ die Sterbensintensität und $\varrho(t)$ die Zinsintensität bedeuten.

M. P. Geppert (Bad Nauheim).

Hoffmann, Ernst-Günter: Ein Versuch zur Darstellung des Einflusses der im Deckungskapital nicht verrechnungsfähigen Erwerbskosten auf die Prämie und die Ge- winnverteilung in der Lebensversicherung. Berlin: Diss. 1939. 47 S.

Im deutschen Gesetz über die privaten Versicherungsunternehmen vom 12. V. 1901 war in § 11 wissenschaftlich und praktisch ganz unbegründet der Zillmersatz mit 12,5‰ begrenzt. Dank besonders dem hartnäckigen Vorgehen Höckners ist der betreffende Satz 1923 gestrichen worden. Das Aufsichtsamt läßt aber nicht mehr als 35‰ zu. In der von Rose angeregten Dissertation wird untersucht, wie die beim Deckungskapital nicht verrechnungs- fähigen Erwerbskosten doch gedeckt werden können, und zwar entweder 1. aus den laufenden Verwaltungskosten oder 2. aus den jährlichen Gewinnen oder 3. aus diesen und Zuschlägen. Verfahren 2 und 3 werden an ausführlichen Tabellen und numerisch erläutert. Es ergibt sich u. a., daß die in der Praxis übliche Gewinnbeteiligung so zu einer Begünstigung des jungen Eintrittsalters führt. Verf. schlägt vor, die Erwerbskosten in innere und äußere zu zerlegen, von denen jene voll beim Deckungskapital zu verwenden sind, diese aber nur mit dem amtlich zugelassenen Höchstsatz.

Lorey (Frankfurt a. M.).

Schnurr, Willy: Untersuchungen über die Darstellung von Invaliditätswahrschein- lichkeiten als analytische Funktionen. Berlin: Diss. 1939. 47 S.

Die Invaliditätswahrscheinlichkeit i_y wird durch die exponentielle Funktion $e^{a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n}$ dargestellt. Zur Bestimmung der Konstanten werden die Tsche- byscheffschen Orthogonalfunktionen verwendet; dazu wird das Verfahren von Lorenz für die Berechnung der Trende benützt. Die Konstanten a_v wurden nach dem Schema von Tschetwerikoff berechnet. Die Ausgleichung wurde für die italienische Tafel der Invaliditätswahrscheinlichkeiten von Ottaviani und die Tafel der Reichsversiche- rungsanstalt für Angestellte 1934 durchgeführt. Zur Beurteilung der Anpassung wurde die χ^2 -Methode angewendet. Zum Schluß werden zwei Tafeln mit den Invaliditäts- wahrscheinlichkeiten i_y und i'_y verglichen und unter der Annahme $i'_y = c_y i_y$ die Beziehungen zwischen den Konstanten a'_v und a_v abgeleitet.

Janko (Prag).

Klingner, Kurt: Über eine Form des Rückversicherungsvertrages zur Erreichung normaler Schwankung des Schadensatzes. Berlin: Diss. 1939. 37 S.

Es werden verschiedene Formen der Schadenverteilung der Feuerversicherung untersucht, die sich bei bestimmten Annahmen hinsichtlich Häufigkeit, Höhe und Versicherungssummen der Schäden ergeben, indem die von Pölya [Ann. Inst. H. Poincaré 1, II, 117—161 (1930)] benutzten Begriffe der Ansteckung und der Verkettung berücksichtigt werden. — Die Re- sultate werden an vorliegendem Beobachtungsmaterial geprüft, und die Frage nach der Form der Rückversicherung wird erläutert.

W. Simonsen (Kopenhagen).

Borch, Fredrik: Über die technische Grundlage der Invalidenversicherung. Skand. Aktuarietidskr. 22, 114—121 (1939).

Anwendung der vom Verf. in seiner Preisschrift (Skand. Aktuarietidskr. 19, 212—233; dies. Zbl. 15, 169) dargestellten Methode auf die Konstruktion von doppelt abgestuften Ausscheidetafeln für Invaliden. *W. Simonsen* (Kopenhagen).

Pârvolescu, Const.: Recherches statistiques sur les mesures représentées par les notes données aux élèves. Bul. fac. şti. Cernăuţi 12, 22—53 u. franz. Zusammenfassung 53—54 (1939) [Rumänisch].

Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, statistische Kennzahlen für die aus den Prüfungsergebnissen folgenden Notenreihen anzugeben, um dadurch Rückschlüsse auf Schule, Lehrer, Schwierigkeiten des Faches u. ä. ziehen zu können. Mathematisch bemerkenswert ist, daß die Summenfunktion (y) in einem Teil der Untersuchung durch die Differentialgleichung $\frac{dy}{dx} = ky^m(a - y)^n = z$ (z = Verteilungsfunktion) eingeführt wird; eine von der sonst in der Statistik üblichen verschiedene Momentdefinition $M_r = \int_0^a zy^r dy$ erweist sich als recht zweckmäßig. Die eingeführte Klasse von Summenfunktionen wird sich auch sonst in der Statistik vorteilhaft zeigen. *F. Knoll* (Wien).

Numerische und graphische Methoden.

● **Ives, Howard Chapin:** Seven place natural trigonometrical functions. New York: John Wiley & Sons, Inc., a. London: Chapman & Hall, Ltd. 1939. 222 pag. 12/6.

Neuschuler, L.: Sur les tables optimales à trois membres des fonctions de deux variables. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 24, 843—846 (1939).

Betrachtungen über Tafeln geringsten Umfanges für Funktionen zweier Veränderlicher. Während Verf. in einer früheren Veröffentlichung (dies. Zbl. 19, 36) das Prinzip entsprechender Multiplikationen bei Argument und Funktion zur Verkürzung der Tafeln anwandte, benutzt er hier mehrere Tafeln, aus denen nacheinander abzulesen ist. Additionen von Ableseergebnissen sind außerdem gestattet. *Theodor Zech* (Darmstadt).

Bertschmann, S.: Schnittpunkt zweier Geraden. Schweiz. Z. Vermessgswes. 38, 1—7 (1940).

Im Anschluß an Mittelstaedt, Deutsche Z. Vermessgswes. 1931, wird gezeigt, wie man aus den Koordinaten von 4 Punkten A, B, C, D möglichst günstig die Koordinaten des Schnittpunktes S der Geraden AB und CD erhält. Die formelmäßige Herleitung der Koordinaten von S wird geometrisch eingeleitet: Das Verhältnis der Koordinatendifferenzen S gegen A zu B gegen A ist gleich dem Verhältnis der Dreiecksfläche ACD zur Vierecksfläche $ACBD$. Für die Zahlenrechnung werden an Hand einer Punktbewertung der Teilvorgänge ins einzelne gehende Vorschläge zu günstigster Anordnung gemacht. Zahlenbeispiel. *Theodor Zech*.

● **Boltz, H.:** Substitutions-Verfahren zum Ausgleichen großer Dreiecksnetz: in einem Guß nach der Methode der kleinsten Quadrate. (Veröff. d. Preuß. Geodät. Inst. N. F., Nr. 108.) Potsdam: 1938. VIII, 93 S. RM. 12.—.

Gauß hat in Artikel 20, Supplementum theoriae combinationis etc., zur Auflösung eines umfangreichen Normalgleichungssystems ein Näherungsverfahren angegeben, vor dessen Gebrauch er später in einem Brief an Gerling warnte; denn es sei nur mit besonderen Kunstgriffen anzuwenden, deren Erklärung das Niederschreiben eines kleinen Buches erfordern würde. Verf. geht auf diese erst nach dem Tode von Gauß bekannt gewordenen Kunstgriffe ausführlich ein, schildert ihren Einfluß auf neuere Verfahren und macht sie zur Grundlage seines eigenen Lösungsverfahrens. Sind zwei getrennt voneinander aufgelöste Normalgleichungssysteme gegeben, so werden aus ihnen durch geeignete Transformationen zwei neue Systeme gewonnen; es wird dann die Auflösung der vereinigten Normalgleichungssysteme durchgeführt, „während beim Entwicklungsverfahren von zwei gegebenen Normalgleichungssystemen nur das eine aufgelöst und mit Korrelatenentwicklungen versehen ist, und die Lösung darin besteht, beide Systeme zu vereinigen und sämtliche Korrelaten in Reihen nach den Widersprüchen der Bedingungsgleichungen zu entwickeln“. Die Einzelheiten des neuen Lösungsverfahrens, das durch umfangreiche Zahlenbeispiele belegt ist, können in einem kurzen Referat nicht wiedergegeben werden. *Rehbock* (Braunschweig).

Collar, A. R.: On the reciprocation of certain matrices. Proc. roy. Soc. Edinburgh **59**, 195—206 (1939).

Es werden Methoden angegeben, mit denen man numerisch günstig die reziproken Matrizen zu Matrizen folgender Typen berechnen kann: 1. $a_{ik} = \int_a^b w(x) x^{i+k-2} dx$, wenn $w(x)$ eine Funktion ist, zu der einfache Orthogonalfunktionen $p_i(x)$ mit $\int_a^b w(x) p_i(x) p_k(x) dx = 0$ bzw. 1 gehören; 2. $a_{ik} = x_k^{i-1}$, also Matrizen, deren Determinanten Differenzenprodukte sind.

G. Köthe (Münster i. W.).

Hitchcock, Frank L.: Algebraic equations with complex coefficients. J. Math. Physics, Massachusetts Inst. Technol. **18**, 202—210 (1939).

Verf. dehnt sein Verfahren (vgl. dies. Zbl. **19**, 132) auf komplexe Gleichungen aus. Ist $\alpha + i\beta$ eine Wurzel, so kann man durch Versuche α finden, indem man alle Wurzeln um A verkleinert. Haben in der neuen Glg. $R + iS = 0$ R und S einen gemeinsamen Teiler T , so ist $A = \alpha$ und ist $i\beta$ eine Wurzel von T . Ist der bei R und S nach Euklid auftretende Rest nur ungefähr gleich Null, so erhält man auch β nur ungefähr, kann jedoch α und β nach Newton verbessern.

E. Bodewig (Den Haag).

Johansen, Paul: Iteration von Funktionen zweier reellen Variablen und einer komplexen Variablen. Skand. Aktuarie Tidskr. **22**, 101—113 (1939).

Die Gleichungen $x = \varphi(x, y)$, $y = \psi(x, y)$ mögen die Lösung (ξ, η) haben. Sind die partiellen Ableitungen von φ, ψ in der Umgebung von (ξ, η) stetig und liegt (x_0, y_0) „nahe genug“ an (ξ, η) , so gelten die Sätze: I. Die Bedingungen $a^2 + c^2 < 1$, $b^2 + d^2 < 1$, $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - \Delta^2 < 1$ sind notwendig und hinreichend dafür, daß die iterierten Paare $(x_r, y_r) = (\varphi(x_{r-1}, y_{r-1}), \psi(x_{r-1}, y_{r-1}))$ gegen (ξ, η) konvergieren. Die Annäherung verbessert sich dabei mit jedem Schritt. Ia. Wenn $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 < 1$, so konvergiert $(x_r, y_r) \rightarrow (\xi, \eta)$. Dabei ist gesetzt: $\varphi'_x = a$, $\varphi'_y = b$, $\psi'_x = c$, $\psi'_y = d$, $\Delta =$ Funktionaldeterminante, alles an der Stelle (ξ, η) . II. $a < 0$, $d < 0$, $(b - c)^2 < 4\Delta$ (also vor allem $\Delta > 0$) sind notwendig und hinreichend dafür, daß (ξ, η) stets innerhalb des kleinsten Kreises durch zwei aufeinanderfolgende iterierte Werte liegt. In vielen Fällen (bei linearen Gleichungen stets) erhält man eine bessere Näherung, wenn man nach drei Iterationen (x_i, y_i) , $i = 0, 1, 2, 3$, nicht wieder iteriert, sondern berechnet: III. $x' = x_0 - \Delta x_0 (\Delta x_0 \Delta^2 y_1 - \Delta x_1 \Delta^2 y_0) / N + \Delta y_0 (\Delta x_0 \Delta^2 x_1 - \Delta x_1 \Delta^2 x_0) / N$, wo $N = \Delta^2 x_0 \Delta^2 y_1 - \Delta^2 x_1 \Delta^2 y_0$, $y' = \dots$ (Vertauschung von x mit y in obigem Ausdruck). Δ und Δ^2 bezeichnen hier Differenzen. — Bei analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen $z = f(z)$ vereinfachen sich die vorstehenden Sätze, indem als einzige Bedingung jedesmal gilt: I': $a^2 + b^2 < 1$, Ia': $a^2 + b^2 < \frac{1}{2}$, II': $a < 0$, III': $z' = z_0 - (\Delta z_0)^2 / \Delta^2 z_0$, letztere hat die gleiche Form wie bei Funktionen einer Variablen.

E. Bodewig (Den Haag).

Casale, F.: Su di un'equazione collegata a quella di Keplero. I. Ist. Lombardo, Rend., III. s. **72**, 333—346 (1939).

Verf. untersucht die möglichen Lösungen der Keplerschen Gleichung $y - E \sin y = M$, wo E die Exzentrizität, M die mittlere Anomalie und y die exzentrische Anomalie bedeuten. Diese Gleichung wird nach y mittels der Lagrangeschen Reihenentwicklung aufgelöst, die Konvergenz wird bedingt durch

$$E \leq \frac{2r \cdot e^r}{e^{2r} + 1}, \quad (1)$$

wobei r der Gleichung genügen muß

$$e^r(1 - r) + e^{-r}(1 + r) = 0.$$

Die Aufgabe der vorliegenden Untersuchung ist, diese Gleichung aufzulösen und den Maximalwert von E in (1) durch sukzessive Annäherung zu bestimmen, wobei der Verf. die numerische Rechnungsmethode von Peano und Cassina, die in U. Cassinas „Calcolo numerico“ dargelegt ist, benützt. Auf diese Weise gelingt es dem Verf., r auf 22 Dezimalstellen und E auf 21 Dezimalstellen genau zu bestimmen. Hubert Slouka.

Casale, F.: Su di una equazione collegata a quella di Keplero. II. Ist. Lombardo, Rend., III. s. 72, 347—361 (1939).

Fortsetzung der vorstehend besprochenen Arbeit, wobei der maximale Wert von E berechnet wird. *Hubert Slouka (Prag).*

Stock, J. Stevens: A method of graphic interpolation. J. Amer. Statist. Assoc. 34, 709—713 (1939).

Verf. weist auf das Iterationsverfahren von Aitken (vgl. Zbl. 5, 20) hin und behandelt die konstruktiv-graphische quadratische und kubische Interpolation nach diesem Verfahren. In entsprechender Weise lassen sich Interpolationen höherer Ordnung durchführen, obgleich dann der Vorgang unübersichtlich und schwerfällig wird. Den Schluß bildet die Anwendung des Verfahrens auf Tabellen mit zwei Argumenten. — Zwei ausführliche Beispiele dienen zur Erläuterung. *J. Sutor.*

Bickley, W. G.: Formulae for numerical integration. Math. Gaz. 23, 352—359 (1939).

Contiene una lista sistematica delle varie formule di quadratura che può essere utile, specialmente per le osservazioni da cui ogni formula è accompagnata. *Beretta.*

Akker, J. A. van den: Erratum: A mechanical integrator for evaluating the integral of the product of two functions and its application to the computation of I. C. I. color specifications from spectrophotometric curves. J. Opt. Soc. Am. 29, 364 (1939). J. opt. Soc. Amer. 29, 501 (1939).

Vgl. dies. Zbl. 22, 67.

Rosseland, Svein: Mechanische Integration von Differentialgleichungen. Naturwiss. 27, 729—735 (1939).

In Oslo ist eine Maschine zum Auflösen von Differentialgleichungen im Bau, die auf den gleichen Grundlagen beruht wie die bekannten Maschinen von V. Bush, Massachusetts, USA., jedoch für Differentialgleichungen höherer Ordnung eingerichtet wird. Die bisher in Amerika, England und Rußland vorhandenen derartigen Maschinen haben 6—8, die Osloer Maschine hat schon im jetzigen Zustande 12 Integratoren. Die von Bush entwickelten Integratoren, Drehmomentverstärker und Kompensatoren zum Ausschalten von totem Gang werden auch in Oslo im wesentlichen unverändert verwendet. Die Genauigkeit wird durch Verminderung der Anzahl der Zahnradkoppelungen, Verringerung der Belastungen (z. B. durch Verwendung von Duraluminium) und Einbau von Spezialzahnradern erhöht. Nachführen auf Kurven und Additionen mittels Zahnradern beeinträchtigen die Genauigkeit. Sie werden nach Möglichkeit durch Erhöhung der Gleichungsordnung ersetzt; Beispiel $\varphi'' = -\sin\varphi$, wo $\sin\varphi$ als Lösung von $\varphi'' = -\varphi$ erzeugt wird. Wiedergaben vor sehr schönen Zeichnungen der Osloer Maschine zeigen Scharen von elliptischen und Besselschen Funktionen mit verschiedenen Anfangsbedingungen, ferner Bahnen in verschiedenen Zentralfeldern und bei verschiedenen Störungseinflüssen. Die Kosten der Maschine werden auf 70000 RM. geschätzt, einen Betrag, der bei der hohen Bedeutung und vielseitigen Verwendbarkeit der Maschine für zahllose Fragen von Wissenschaft und Technik erstaunlich niedrig ist. *Theodor Zech (Darmstadt).*

Nagai, Tanejiro: Intégration graphique de l'équation différentielle linéaire du second ordre. Mem. Ryojun Coll. Engrg. 12, 89—99 (1939).

Es soll $y'' = q(x)y$ graphisch integriert werden, wenn $q(x)$ an den äquidistanten Stellen x_i ($i = 0, 1, 2, \dots$), $x_{i+1} - x_i = h$, gegeben und die Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0$ ist. Verf. ersetzt die Differentialgleichung durch das System von Differenzengleichungen $y_{i+1} = y_i + h y'_i$, $y'_{i+1} = y'_i + h q(x_i) y_i$ ($i = 0, 1, 2, \dots$) und löst diese zeichnerisch unter Benutzung von zwei rechtwinkligen Koordinatensystemen x, y (positive Richtung nach rechts bzw. oben) und y, y' (positive Richtung nach oben bzw. links). $y'' = p(x) y' + q(x) y + r(x)$ läßt sich entsprechend unter Verwendung von vier rechtwinkligen Koordinatensystemen behandeln. Verallgemeinerung auf den Fall nicht äquidistanter x_i . *Werner Schulz (Berlin).*

Richter, W.: Verwendung nomographischer Hilfsmittel für eine graphische Bestimmung der Bahnkurven eines Flugzeugs bei veränderlichen Luftkraftbeiwerten. Ing.-Arch. 10, 292—301 (1939).

Fortsetzung der dies. Zbl. 21, 48 referierten Arbeit Ing.-Arch. 10, 28—34 (1939). Verallgemeinerung auf veränderlichen Anstellwinkel. Gleiche Hilfsmittel. Zech.

Geometrie.

Differentialgeometrie:

Pedrazzini, Pierino: Trattorie e curve di inseguimento. Period. Mat., IV. s. 20, 32—37 (1940).

Erklärung der Schlepp- und Verfolgungskurven. Beziehungen zwischen Leit- und Schleppkurve, insbesondere explizite Integration des Zusammenhangs zwischen ihren Bogenlängen. Instrumentelle Erzeugung der Schleppkurven. (Vgl. auch dies. Zbl. 21, 225.) Harald Geppert (Berlin).

Pírko, Zdeněk: Fußpunkt- und Pseudofußpunktkurven. II. Čas. mat. fys. 69, H. 1, D 5—D 8 (1939) [Tschechisch].

Die Note schließt an eine früher in den Rozhl. mat.-přirodovéd. 1935 erschienene Veröffentlichung des Verf. an, welche die Fußpunkt- und Pseudofußpunktkurven der Laméschen Kurven und der Sinusspiralen zum Gegenstande hatte. Verf. gelangte gelegentlich der damaligen Untersuchungen auch zu bereits bekannten Eigenschaften dieser Kurven und zu Zusammenhängen unter ihnen. Diese Ergebnisse werden hier in Form von Aufgaben zusammengestellt, zu denen auch Abrisse des Lösungsganges und das Ergebnis mitgeteilt werden.

W. Schmid (Brünn).

Sanguinetti, Jeronimo: Beitrag zum Studium einiger spezieller Kurven. An. Soc. Ci. Argent. 128, 71—81 (1939) [Spanisch].

Der Verf. untersucht eine Kurve, die zur Lösung der Aufgabe der Würfelverdoppelung dienen kann, und die er deshalb Kubatrix nennt. Die Normale auf dem Radiusvektor eines Punktes der Kurve schneidet auf der X-Achse eine Strecke gleich dem Kubus des Radiusvektor ab. Ihre Gleichung in Polarkoordinaten ist daher $\rho = \cos^{-\frac{1}{3}} \omega$. Auf die Diskussion dieser Kurve folgt die Definition zweier aus ihr abgeleiteter Kurven. Der Radiusvektor eines Kubatrixpunktes P schneide den Kreis über dem auf der positiven X-Achse liegenden Durchmesser $OA = 1$ in einem Punkt C . Auf dem Lot auf OC in C trage man $CS = CP$ ab. Der Ort von S ist die „Orthokubatrix“. Trägt man von S nach C hin auf dem Lot $ST = CO$ ab, so ist der Ort von T die „Antikubatrix“. Außer diesen beiden Kurven werden noch die Kurven untersucht, die sich ergeben, wenn man die „Ortho-“ und die „Anti“-Konstruktion auf die Strophoide und die Zissoide anwendet.

Max Zacharias (Berlin).

Vesean, Théophile T.: La théorie des courbes définies comme l'intersection des deux surfaces représentées paramétriquement. Bull. sci. École polytechn. Timișoara 9, 91—98 (1939).

Berechnung von Invarianten erster und zweiter Ordnung einer als Schnittmannigfaltigkeit von zwei Flächen $x_1(u_1, v_1), y_1(u_1, v_1), z_1(u_1, v_1); x_2(u_2, v_2), y_2(u_2, v_2), z_2(u_2, v_2)$ definierten Kurve im dreidimensionalen euklidischen Raume. Der Schwerpunkt liegt in der Berechnung von Ableitungen, z. B. $dx/dv_2, dy/dv_2, dz/dv_2; d^2x/dv_2^2, d^2y/dv_2^2, d^2z/dv_2^2$, wobei die u_1, v_1, u_2 als Funktionen von v_2 mittels der Gleichungen $(x=) x_1 = x_2, (y=) y_1 = y_2, (z=) z_1 = z_2$ bestimmt sind.

O. Borůvka (Brünn).

Kobold, F.: Eine einfache Herleitung der Flächenverzerrung, des Vergrößerungsverhältnisses und der Azimutreduktionen bei der winkeltreuen Zylinderprojektion. Schweiz. Z. Vermessgswes. 38, 8—15 (1940).

Bei dem winkeltreuen Zylinderentwurf, der dem Projektionssystem der Landesvermessung zugrunde liegt, werden die Bilder der Großkreise auf dem abgewinkelten Zylindermantel durch die Geraden je zwischen den beiden projizierten Endpunkten ersetzt. Durch die Verwendung der Geraden an Stelle der Großkreisbilder entstehen Verzerrungen an der Länge des Bogenstücks und an den Winkeln zwischen Großkreis und Meridian (Azimutreduktionen), schließlich auch Verzerrungen an den durch Großkreisbögen begrenzten Flächen. Alle diese Verzerrungen werden sehr übersichtlich dadurch erfaßt, daß nach der Abbildung, der Verwendung der sphärischen Formeln und der Annäherung durch Reihenentwicklungen den entstehenden Hauptgliedern eine unmittelbare geometrische Bedeutung in der ebenen Projektion

zugeschrieben wird, so daß die übrigbleibenden kleinen Glieder als Projektionsverzerrungen angesprochen werden dürfen. So ergibt sich im wesentlichen durch geschickte Umformung und Zusammenfassung ein einfacher Weg zur Herleitung der bekannten Verzerrungsformeln.
U. Graf.

Efimoff, N.: Déformation du voisinage d'un point parabolique d'une surface. Rec. math. Moscou, N. s. 6, 427—473 u. franz. Zusammenfassung 474 (1939) [Russisch].

Die Arbeit enthält die Beweise zu den in dies. Zbl. 22, 79, 166 berichteten Sätzen.
Harald Geppert (Berlin).

Bol, G.: Affine Differentialgeometrie, Beantwortung der Preisaufgabe 13, 1934. Nieuw Arch. Wiskde 20, 113—162 (1940) [Holländisch].

Es handelt sich um folgende Aufgabe: $u(x, y)$, $v(x, y) = \text{konst.}$ sei ein Kurvennetz in der affinen x, y -Ebene mit der Eigenschaft, daß in „jedem“ Punkt x, y die „Affinormale“ der Kurve $u = \text{konst.}$ die Kurve $v = \text{konst.}$ an dieser Stelle berührt und umgekehrt. Die Lösung der Aufgabe, diese Netze zu finden, wird auf ein System von Cauchy-Kowalewski zurückgeführt und damit gezeigt, daß diese Netze von 4 willkürlichen Funktionen einer Veränderlichen abhängen. Dann wird eine Reihe von Sonderfällen behandelt. So wird gezeigt, daß es keine solchen Netze gibt, bei denen alle Kurven $u = \text{konst.}$ Parabeln wären. Dann werden solche unserer Netze gesucht, die durch Parallelprojektion aus den Schmiegtangentialkurven einer Fläche entstehen, und gezeigt, daß diese Flächen von höchstens 9 Konstanten abhängen. Hierauf werden unsere Netze ermittelt, die ganz aus Kegelschnitten bestehen. Es folgt schließlich die Bestimmung solcher unserer Netze, die Liesche Gruppen affiner Abbildungen gestatten.

W. Blaschke (Hamburg).

Pylarinos, O.: Über die Guichardschen Strahlensysteme. Math. Z. 46, 45—54 (1940).

Ein Guichardsches Strahlensystem (= G. S.) ist ein solches, dessen Torsen aus den beiden Brennflächen Krümmungslinien ausschneiden. Diese Brennflächen sind dabei durch die Strahlen des Systems so aufeinander bezogen, daß ihre Krümmungslinien sich entsprechen. Die Arbeit gibt ohne Benutzung der allgemeinen Theorie die wichtigsten Eigenschaften der G. S. Insbesondere werden jene speziellen G. S. genauer untersucht, deren beide Brennflächen flächentreu aufeinander bezogen sind. In diesem Falle sind die Brennflächen W -Flächen, welche in entsprechenden Punkten gleiche Gaußsche und mittlere Krümmung haben. Unter Heranziehung des bekannten Zusammenhangs der G. S. mit den pseudosphärischen Flächen (= ps. F.) wird gezeigt, daß jenen ps. F., deren eine Krümmungslinienschar aus Geodätischen besteht, sich (unter gewissen Bedingungen) G. S. koordinieren lassen, deren beide Brennflächen W -Flächen sind, die flächentreu aufeinander bezogen sind und in entsprechenden Punkten gleiche Gaußsche und mittlere Krümmung besitzen. K. Strubecker (Wien).

Takeda, Kusuo: On line congruences. III. Tôhoku Math. J. 46, 46—67 (1939).

Die vorliegende Arbeit ist eine direkte Fortsetzung der früheren Mitteilungen des Verf. Zunächst werden zwei Klassen von Kongruenzen bestimmt, die durch gewisse Eigenschaften der Torsen definiert werden. Es folgt ein Satz über die oskulierenden Komplexe der beiden Torsen, die durch einen Strahl L gehen. — Der formale Aufbau der Differentialgeometrie der Kongruenzen stützt sich auf drei Tensoren, von denen der erste (H_{ik}) als Fundamentaltensor I. Art, die beiden anderen (F_{ik} ; G_{ik}) als Fundamentalgroßen II. Art bezeichnet werden. Verf. nennt zwei Kongruenzen, deren Fundamentaltensoren I. Art einander proportional (bzw. gleich) sind, deformierbar. Sind p und q zwei zugeordnete Strahlen zweier deformierbarer Kongruenzen, so läßt sich durch eine projektive Transformation die Umgebung von p der einen Kongruenz in die Umgebung von q der anderen überführen, so daß $p = q$ wird und die entsprechenden Regelflächen der beiden Kongruenzen durch p und q sich längs q berühren. (Anm. des Ref.: Eine völlig analoge Definition der Deformierbarkeit gab kürzlich C. Tikhotzky [s. folgendes Referat] für die äquiforme Geometrie.) — Es folgt die Untersuchung von oskulierenden linearen und quadratischen Komplexen. Schließlich werden zwei Tensoren III. Ordnung als Fundamentalgroßen III. Art eingeführt und die Nullflächen

der zugehörigen kubischen Formen (Darboux-Richtungen) untersucht. (II. vgl. dies. Zbl. 20, 68.) W. Haack (Karlsruhe).

Tikhotzky, C.: Sur la déformation et la transformation K des congruences. Rec. math. Moscou, N. s. 5, 297—304 (1939).

Il s'agit de l'espace euclidien à trois dimensions. Considérons dans l'espace deux congruences C, C' et une correspondance biunivoque entre les rayons de ces congruences. Supposons que, pour chaque couple de rayons correspondants L, L' il existe un déplacement de la congruence C' tel que, dans la nouvelle position les rayons L, L' coïncident et chaque surface réglée de C passant par L touche le long de L la surface correspondante de C' . Une telle correspondance est dite transformation K ; cette notion correspond, évidemment, à la représentation conforme de surfaces. L'auteur démontre le théorème que, pour que deux congruences soient transformables K l'une à l'autre il faut et il suffit que les deux formes de Sannia relatives à l'une congruence et à l'autre soient proportionnelles avec le même facteur de proportionnalité. Enfin, il examine des questions d'existence concernant les congruences transformables K . O. Borůvka.

Bachvaloff, S.: Sur les couples de congruences stratifiables. Rec. math. Moscou, N. s. 6, 67—75 u. franz. Zusammenfassung 76 (1939) [Russisch].

Une étude au sujet des couples de congruences rectilignes stratifiables au moyen de la méthode du repère mobile de M. E. Cartan. Soient L_1, L_2 deux congruences rectilignes stratifiables et L_3 la congruence des perpendiculaires communes l_3 aux rayons homologues l_1, l_2 de L_1, L_2 . Désignons par N_1, N_2 les points d'intersection du rayon l_3 avec l_1, l_2 . On suppose que L_3 est une congruence pseudosphérique, les foyers de chaque rayon l_3 étant symétriques par rapport au milieu M du segment N_1N_2 . Le repère mobile employé par l'auteur consiste de trois vecteurs unitaires d'origine M qui sont parallèles aux rayons l_1, l_2, l_3 . Quant aux résultats, l'auteur trouve p. ex. la propriété que la longueur N_1N_2 est constante pour tous les rayons l_3 et de même l'angle ω des rayons l_1, l_2 . O. Borůvka (Brünn).

Rasmusen, Ruth B.: The canonical lines and the extremals of two invariant integrals. Amer. J. Math. 61, 1004—1008 (1939).

L'A. associa le rette canoniche di 1^a specie in coppie di rette cuspidali di un cono di 3^a classe; analogamente associa le rette canoniche di 2^a specie in coppie di rette inflessionali di una cubica che giace nel piano tangente alla superficie. Quindi interpreta geometricamente le estremali di due integrali invarianti (le quali non sono che particolari classi di ipergeodetiche). P. Buzano (Torino).

Bell, P. O.: The first canonical pencil. Duke math. J. 5, 784—788 (1939).

Data una superficie σ di S_3 proiettivo, un elemento di 2° ordine E_2 di curva di σ determina due quadriche asintotiche osculatrici [Bompiani, Atti Accad. Naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. fis. mat. natur. (6) 3, 395—400 (1926); 4, 262—267 (1926)]. Si determinino in un punto P di σ gli E_2 delle curve D_k le cui quadriche osculatrici si tagliano in una curva appartenente ad una quadrica di Darboux in P . Si hanno così terne di tangenti appartenenti ad un'involuzione cubica: vi sono ∞^2 quadriche che hanno contatto del 2° ordine con σ in P e la segano secondo terne dell'involuzione. Le polari della normale proiettiva rispetto alle quadriche del fascio sono le rette del 1° fascio canonico. E. Bompiani (Roma).

Hünke, Anneliese: Über gewisse Flächen konstanter Krümmung in Räumen konstanter Krümmung. Schr. math. Inst. u. Inst. angew. Math. Univ. Berlin 4, 259—304 (1939).

Diese Arbeit bringt eine Differentialgeometrie der Kurven und Flächen in nicht-euklidischen Räumen. Hierzu werden projektive Koordinaten benutzt, die zu $\sum x_i^2 = k^2$ genormt sind, wobei $k^2 = +1$ oder -1 ist, je nachdem es sich um elliptische oder hyperbolische Geometrie handelt. Mit sinngemäßen Änderungen übertragen sich viele Tatsachen der euklidischen Differentialgeometrie. Wie zu Beginn abgeleitet wird, sind z. B. die Torsen gerade diejenigen Flächen, die die Krümmung des umgebenden

Raumes haben, und decken sich andererseits mit der Gesamtheit der Tangentenflächen von Raumkurven. Die Abwicklung der n.-e. Kegel auf die n.-e. Ebene führt dort teilweise zu n.-e. Raumformen. Im II. Teil werden dann die Rotationsflächen konstanter Krümmung im n.-e. Raume behandelt und der Satz von Beltrami übertragen, wonach die Orthogonaltrajektorien der durch Parallelverschiebung längs der Achse auseinander hervorgehenden Rotationsflächen konstanter Krümmung wieder konstante Krümmung besitzen. An Stelle der Parallelverschiebungen treten hierbei gewisse n.-e. Bewegungen, die die Rotationsachse festlassen. In der n.-e. Geometrie gibt es ferner zu jeder Fläche eine sog. Polfläche als geometrischen Ort der Pole der Tangentialebenen. Es wird bewiesen, daß die Polflächen zu Rotationsflächen konstanter Krümmung wieder konstante Krümmung haben, die in bestimmter Beziehung zur Krümmung der Ausgangsfläche steht. Nach Betrachtung einiger Sonderfälle von Rotationsflächen konstanter Krümmung wendet sich der III. Teil dann der Verallgemeinerung des Hilbertschen Satzes über die Flächen negativer konstanter Krümmung zu. Es ergibt sich hierbei, daß es im hyperbolischen Raume der Krümmung -1 keine singularitätenfreien Flächen mit negativer konstanter Krümmung $K < -1$ und im elliptischen Raume der Krümmung $+1$ auch keine derartigen Flächen konstanter positiver Krümmung K mit $0 < K < 1$ geben kann. Der Beweis beruht wie im euklidischen Falle auf der Existenz reeller Asymptotenrichtungen in den genannten Fällen.

W. Burau (Hamburg).

De Cicco, John: The differential geometry of series of lineal elements. Trans. Amer. Math. Soc. 46, 348—361 (1939).

Diese Arbeit behandelt die Differentialgeometrie der Scharen von Linienelementen der Ebene. Es kommen die bereits früher von Kasner eingeführten Begriffe der Turbinen und sog. „flat fields“ zur Sprache, die jeweils die Geraden und Ebenen der gewöhnlichen Differentialgeometrie ersetzen, sowie die bereits früher vom Verf. und Kasner behandelte „whirl-motion“-Gruppe (vgl. E. Kasner und de Cicco, dies. Zbl. 20, 399). Außer den obengenannten Begriffen wird noch die sog. „limaçon series“ eingeführt, eine einparametrische Schar von Linienelementen, die stets in einem „flat field“ enthalten ist und eine Konchoide als Punktort besitzt. Dann werden zu der gegebenen ∞^1 Schar von Linienelementen die berührende Turbine und die oskulierenden „flat field“ und „limaçon series“ formelmäßig eingeführt sowie Krümmung und Torsion für Elementscharen hiermit begründet. Das wichtigste Ergebnis ist dann die Tatsache, daß zwei Scharen, die in Krümmung und Torsion übereinstimmen, bez. der obengenannten Gruppe äquivalent sind.

W. Burau (Hamburg).

Davies, E. T.: Lie derivation in generalized metric spaces. Ann. Mat. pura appl., IV. s 18, 261—274 (1939).

Le travail se compose de deux parties distinctes. Dans la première, l'A. examine l'aspect de quelques formules concernant le changement d'ordre de dérivation covariante dans les espaces de Finsler suivant qu'on adopte les géométries de Cartan ou de Berwald. Dans la deuxième partie, on envisage une transformation infinitésimale de l'élément d'appui qui conduit à trois types de dérivées invariantes, généralisations aux espaces de Finsler des dérivées définies par Schouten et van Kampen pour l'espace de Riemann (ce Zbl. 8, 179), à savoir: $\overset{1,2}{D}$ dérivée covariante, $\overset{1,3}{D}$ dérivée de Lie, $\overset{2,3}{D}$ dérivée apparente („scheinbare“). La dérivée de Lie s'étend même à des objets géométriques qui ne sont pas des tenseurs, par exemple aux coefficients de connexion $\overset{1,3}{\Gamma}_{jk}^{*i}$ avec ce résultat remarquable que $\overset{1,3}{D}\overset{1,3}{\Gamma}_{jk}^{*i}$ est un tenseur. g_{ij} étant le tenseur fondamental, $\overset{1,3}{D}g_{ij} = 0$ est l'équation de Killing pour l'espace de Finsler. On retrouve aussi un résultat de Duschek-Mayer relatif à l'écart géodésique. Les types de dérivées possibles ne sont pas épuisés par les trois ci-dessus. Ainsi, la consi-

dération de la valeur variée d'un objet géométrique, conduit à l'opération $\overset{\alpha}{D}$, que l'auteur applique au vecteur de courbure ϱ^i d'une courbe. $\overset{\alpha}{D}\varrho^i = 0$ exprime, avec $\varrho^i = 0$, la condition pour que la courbe variée d'une extrémale soit elle-aussi extrémale. On retrouve aussi l'équation de l'écart géodésique donnée par Cartan et les conditions de collinéation projective de Knebelman [Amer. J. Math. 51 (1929)]. Les $\overset{r,s}{D}(r, s = 1, 2, 3)$ servent aussi à établir des formules de Frenet, l'élément d'appui étant tangent à la courbe.

N. Théodoresco (Bukarest).

Šlebodziński, W.: Sur quelques problèmes de la théorie des surfaces de l'espace affine. Prace mat.-fiz. 46, 291—345 (1939).

Verf. bringt im ersten Teil seiner Arbeit die Grundlagen der affinen Flächentheorie, indem er ausgeht von den Pfaffschen Formen Cartans ω^h, ω_k^h , die folgendermaßen definiert sind: In jedem Punkte des affinen Raumes denke man sich ein Dreibein von Vektoren \vec{I}_h gegeben. Es lassen sich dann die Vektoren $d\vec{M}\vec{O}$ ($O =$ Koordinatenursprung, M ein Punkt des affinen Raumes), $d\vec{I}_h$ linear aus ihnen kombinieren: $d\vec{O}\vec{M} = \omega^r \vec{I}_r$, $d\vec{I}_h = \omega_i^r \vec{I}_r$. Die Pfaffschen Formen genügen den Bedingungen $(\omega^h)' + [\omega_r^h \omega^r] = 0$, $(\omega_i^h)' + [\omega_r^h \omega_i^r] = 0$, wobei z. B. $(\omega^h)'$ die äußere Ableitung (dérivation extérieure) der Form ω^h , $[\omega^\alpha \omega^\beta]$ das äußere Produkt der Formen $\omega^\alpha \omega^\beta$ bedeuten. Ist eine Fläche im affinen Raum gegeben, so werden \vec{I}_1, \vec{I}_3 zweckmäßigerweise als Tangentenvektoren gewählt. Dadurch, daß dem Bezugssystem \vec{I}_h zwei weitere Bedingungen auferlegt werden, gelangt Verf. leicht zur analytischen Definition der Affinnormalen und anschließend zu den Asymptotenlinien, affinen Krümmungslinien und Hauptkrümmungsradien. Besonderes Gewicht legt Verf. auf die von Cartan eingeführten Begriffe des induzierten affinen Zusammenhangs und der affinen Isomorphie von Flächen. Diese Theorie schließt sich an die Pfaffschen Formen $\omega^e, \omega_\alpha^e$ an, die man so erhält, daß man sich in jedem Punkt M einer Fläche ein Zweibein von zwei Tangentenvektoren \vec{I}_1, \vec{I}_2 denkt und die infinitesimalen Änderungen von M und $d\vec{I}_\alpha$ aus den \vec{I}_α selbst linear kombiniert: $d\vec{M} = \omega^e \vec{I}_e$, $d\vec{I}_\alpha = \omega_\beta^e \vec{I}_e \cdot \omega_1^\alpha + \omega_2^\alpha$ ist ein vollständiges Differential, woraus hervorgeht, daß der induzierte affine Zusammenhang, der durch die ω bestimmt wird, die Definition einer absoluten Flächeneinheit gestattet. Die ω genügen den Strukturgleichungen:

$$(\omega^\alpha)' + [\omega_\beta^\alpha \omega^\beta] = 0, \quad [\omega_\lambda^\alpha] + [\omega_\beta^\alpha \omega_\lambda^\beta] = R_{12\lambda}^\alpha [\omega^1 \omega^2].$$

Da die ω die Christoffelschen Übertragungssymbole $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$ liefern, lassen sich leicht die Differentialgleichungen für die affingeodätischen Linien angeben. Es sind die Flächenkurven, deren Schmiegeebenen in jedem Punkte die Affinnormale der Fläche enthalten. Isomorph heißen zwei Flächen, wenn sie sich punktweise so aufeinander abbilden lassen, daß in entsprechenden Punkten die Pfaffschen Formen ω übereinstimmen. Es wird gezeigt, daß analog zur gewöhnlichen Flächentheorie in zugeordneten Punkten auch die Affinkrümmungsmaße einander gleich sein müssen. Besonders eingehend wird folgende Frage behandelt: Gegeben sei eine zweidimensionale Punktmannigfaltigkeit, bei der ein affiner Zusammenhang definiert ist, derart, daß die Form $\omega_1^\alpha + \omega_2^\alpha$ ein vollständiges Differential ist. Läßt sich diese Mannigfaltigkeit im dreidimensionalen affinen Raum durch eine Fläche mit demselben induzierten affinen Zusammenhang realisieren? Zum Schluß widmet sich Verf. denjenigen Flächen, bei denen der induzierte affine Zusammenhang symmetrisch im Sinne Cartans ist. Es wird gezeigt, daß diese Flächen derart auf die Ebene abbildbar sind, daß den affingeodätischen Linien die Geraden der Ebene entsprechen. Die allgemeinste symmetrische Übertragung wird explizit angegeben und eine genaue Klassifikation dieser Flächen vorgenommen.

Knothe (Berlin).

● Takasu, Tsurusaburo: *Differentialgeometrien in den Kugelräumen*. Bd. 2: *Laguerresche Differentialkugelgeometrie*. Tokyo: Maruzen Comp., Ltd. 1939. XX, 444 S. geb. \$ 3.50.

Unter Verwendung eines bedeutenden literarischen Materials, das nicht weniger als 228 Abhandlungen, Broschüren und Bücher umfaßt, bietet der vorliegende Band 2 der „Differentialgeometrien in den Kugelräumen“ eine Darstellung der Laguerreschen Differentialkugelgeometrie in 5 Kapiteln: Einleitende Theorie (I), Theorie der L -Kreisscharen (II), Theorie der L -Kugelscharen (III), Theorie der L -Kugelkongruenzen (IV), Theorie der L -Kegelsysteme (V). — Die Entwicklung des Stoffes ist durch einen dauernden Parallelismus zur bewegungsinvarianten Differentialgeometrie innerhalb euklidischer Räume bestimmt. So entsprechen z. B. im II. Kapitel den allgemeinen ebenen orientierten Kurven die allgemeinen Kurvenpaare als Hüllgebilde von Scharen orientierter Kreise, der orientierten Tangente ein Paar orientierter Tangenten, der natürlichen Gleichung einer ebenen Kurve entsprechen Paare natürlicher Gleichungen in der Laguerreschen Differentialkugelgeometrie. — Analog erscheinen im III. Kapitel allgemeinen Raumkurven allgemeine Torsenpaare als Hüllgebilde einer Schar orientierter Kugeln zugeordnet, oder orientierten Ebenen orientierte Ebenenpaare, den Paaren natürlicher Gleichungen der Raumkurven Tripel natürlicher Gleichungen im Laguerreschen Kugelraum. Flächentheorie wird vornehmlich in den weiteren Kapiteln getrieben, mehr allgemein im IV. Kapitel, wo der allgemeinen Fläche das allgemeine Flächenpaar als Hüllgebilde einer Kongruenz orientierter Kugeln gegenübergestellt wird (den orientierten Tangentialebenen entsprechen dabei Paare orientierter Ebenen), mehr speziell im V. Kapitel, wo die Regelflächen mit Hüllflächen orientierter Kreiskegel in Korrespondenz treten. Jedoch findet man auch im IV. Kapitel spezielle Flächentheorie, so die der abwickelbaren Flächen bzw. der L -Krümmungskugelkongruenzen wie auch die der Minimalflächen bzw. Mittenkugelkongruenzen und L -Minimalflächen. — Methodisch verlaufen die Entwicklungen im wesentlichen in den von W. Blaschke und der Hamburger Schule vorgezeichneten Bahnen: Verwendung tetrazyklischer bzw. pentasphärischer Koordinaten (neben vielen anderen), Abkürzung durch vektorielle Schreibweise, lineare Abhängigkeit bzw. Unabhängigkeit derartiger Vektoren, Ableitungsgleichungen, Integrabilitätsbedingungen, natürliche Gleichungen. Hervorgehoben seien die §§ 8 und 13, welche das bekannte Material über Laguerresche Differentialgeometrie von Kreis- und Kugelscharen (bzw. Kurven und Torsen) im Großen sammeln. Wer das Formale weniger liebt, wird auch in den §§ 28, 29, 30 gelegentlich der Behandlung ebener und sphärischer Krümmungslinien sowie der von Nabelpunkten und Laguerre-minimalflächen eine Abwechslung finden, insbesondere in der Darstellung neuerer Laguerre-geometrischer Verallgemeinerungen des Carlemanschen Satzes sowie Weierstraßscher Formeln und Sätze. — Gruppentheoretisch wird man (wie schon im I. Band) eine genauere Darlegung der abstrakten Hintergründe die Isomorphismen der Laguerregruppe betreffend sehr vermissen. Dazu kommt es im Textverlauf nur in spärlicher Weise, obwohl im Vorwort davon mehr versprochen wird. Der Hauptwert des Buches liegt eben auf bibliographischem Gebiet, in der minutiösen Zusammenstellung der so mächtig angeschwollenen Originalliteratur. Im Hinblick darauf wird man auch zahlreiche Druck- und stilistische Fehler in Kauf nehmen. *M. Pinl* (Augsburg).

Paetz, Gerhard: *Differentialgeometrie der Kugelkomplexe*. I. Math. Z. 45, 669 bis 705 (1939).

In dieser Arbeit wird der Grund gelegt zu einer differentiellen Behandlung der Kugelkomplexe in der Möbiusschen Kugelgeometrie. Die pentasphärischen Koordinaten eines Komplexes hängen von drei Parametern u^i ab. Diese Koordinaten werden in dem Fünfervektor $\mathfrak{x}(u^1, u^2, u^3)$ zusammengefaßt. Die Kugeln \mathfrak{x} werden durch die Forderung $(\mathfrak{x} \mathfrak{x}) = 1$ normiert, wobei $(\mathfrak{x} \mathfrak{y})$ das Möbiussche Skalarprodukt der Fünfervektoren $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}$ bedeutet. Als erste Möbius-invariante ternäre quadratische Differential-

form findet man: $(G) \equiv (\xi_i \xi_{i*}) du^i du^* = G_{i*} du^i du^* \left(\xi_i = \frac{\partial \xi}{\partial u^i} \right)$. Der Fall der linearen Abhängigkeit der Vektoren $\frac{\partial \xi}{\partial u^i}$ wird ausgeschlossen (Entartung). Außerdem werden nur solche Komplexe untersucht, bei denen der Rang der Matrix (G_{i*}) drei ist. Zu den Vektoren ξ, ξ_i gibt es einen Fünfervektor η , der zu allen ξ, ξ_i orthogonal ist. Je nachdem, ob $(\eta \eta) > 0$ oder $(\eta \eta) < 0$, heißt der Komplex hyperbolisch oder elliptisch. Alle geometrischen Deutungen beziehen sich auf den ersten Fall, in dem also η eine Kugel darstellt (Normalkugel). η wird durch $\eta \eta = +1$ oder $\eta \eta = -1$ normiert. Als zweite ternäre quadratische Fundamentalform bietet sich dann sogleich dar: $(H) \equiv (\eta_i \xi_{i*}) du^i du^* = H_{i*} du^i du^*$. Mit Hilfe der Formen $(G), (H)$ werden die Ableitungsgleichungen und deren Integrierbarkeitsbedingungen aufgestellt. Anschließend wird die Frage beantwortet, inwieweit ein Komplex bis auf Möbiustransformationen durch (G) und (H) oder (G) allein festgelegt ist. Nach Aufstellung eines vollständigen Systems von Differentialinvarianten zweiter Ordnung, wird gezeigt, daß ein Komplex bis auf Möbiustransformationen festgelegt werden kann durch Angabe gewisser Differentialinvarianten dritter und vierter Ordnung. Der Fall, daß der Komplex $\eta(u^1, u^2, u^3)$ entartet oder, was dasselbe ist, daß der Rang der Matrizen $(H_{i*}) < 3$ ist, wird eingehend diskutiert, ebenso die Beziehungen, die zwischen den Hauptkrümmungen und den Hauptkrümmungsradien der Komplexe ξ und η bestehen. Sodann betrachtet Verf. die in einem Komplex enthaltenen einparametrischen Kugelscharen und stellt Analoga auf zu den Krümmungslinien (Hauptscharen), Normalkrümmung, geodätischer Krümmung und Torsion „beliebiger“ Kurven auf Hyperflächen im R_3 . Für die Hauptscharen werden geometrisch kennzeichnende Eigenschaften angegeben. Die Fälle, in denen irgendeine der drei eben erwähnten Krümmungen verschwindet, werden geometrisch gedeutet. Zum Schluß wird noch eine Verallgemeinerung des η -Komplexes (Normalkomplex) gebracht: Jeder Kugel ξ wird eine Kugel η zugeordnet, die die Kugeln ξ und $\xi + d\xi$ unter demselben Winkel ω schneidet, für die also gilt $\eta \xi = \sqrt{\eta \eta} \cos \omega$, $\eta \xi_i = 0$. ω ist natürlich im allgemeinen nicht im Komplex ξ konstant. Die Kugeln η bilden einen ξ zugeordneten Komplex. η ist immer Grundkugel eines Berührungskomplexes von ξ , d. h. eines Komplexes, der ξ und alle in erster Näherung benachbarten Kugeln des Komplexes enthält. Zu η läßt sich immer eine Richtung du^2 finden, so daß der Berührungskomplex, dessen Grundkugel η ist, auch Schmiegekomplex aller Kugelscharen ist, die ξ und $\xi + \xi_i du^i$ enthalten. Als Schmiegekomplex einer einparametrischen Kugelschar war dabei ein Komplex definiert, der ξ und alle bis zur zweiten Ordnung benachbarten Kugeln enthält. Umgekehrt entspricht jedem Richtungsfeld du^i im Komplex ein Krümmungskomplex. Speziell werden die Krümmungskomplexe untersucht, die den Hauptkrümmungsrichtungen entsprechen. *Knothe.*

Konvexe Gebilde. Direkte Infinitesimalgeometrie:

Geppert, Harald: Über einige Kennzeichnungen des Kreises. Math. Z. 46, 117—128 (1940).

Wenn sich in einer Eilinie eine Sehne der festen Länge $2L$ so herumführen läßt, daß sie stets dieselbe Bogenlänge abschneidet, so schneidet sie auch stets dasselbe Flächensegment ab und umgekehrt. Die Kurve ist dann stets ein Kreis, falls nicht die Sehnen den Umfang halbieren. In diesem letzteren Fall gibt es noch andere Kurven dieser Eigenschaft, die Verf. „Zindlersche Kurven“ nennt. Die Sehnen, die hier Umfang und Flächeninhalt halbieren, hüllen dann eine Kurve \bar{C} ein — die sie in ihrer Mitte berühren —, die in jeder Richtung genau eine Tangente hat (sie hat Spitzen, und zwar wenigstens drei). Umgekehrt lassen sich aus jeder solchen Kurve, deren Stützfunktion dreimal stetig differenzierbar ist, Zindlersche Kurven gewinnen, wenn man nur L groß genug wählt. Die einzige Zindlersche Kurve mit Mittelpunkt ist der Kreis, ebenso die einzige konstanter Breite. Eine Zindlersche Kurve hat mindestens 6 Scheitel, mindestens 3 der halbierenden Sehnen sind Doppelnormalen

(sie entsprechen den Scheiteln von \bar{C}). — Im übrigen hat in einer Zindlerschen Kurve nicht jede Sehne der Länge $2L$ die Eigenschaft, Umfang und Flächeninhalt zu halbieren, denn es gibt im allgemeinen durch jeden Punkt zwei Sehnen dieser Länge, von denen nur eine die Eigenschaft besitzen kann. Fallen diese beiden Sehnen aber für jeden Punkt der Kurve zusammen, so ist sie wieder ein Kreis. *Bol.*

Hornich, Hans: Bemerkungen zu einer allgemeinen Ungleichung für Kurven. *Mh. Math. Phys.* **49**, 105—108 (1940).

Die in einer vorangehenden Arbeit des Verf. (dies. Zbl. **21**, 263) gefundenen Ergebnisse werden auch für einfache geschlossene Kurven formuliert und sämtlich auf den n -dimensionalen Fall verallgemeinert. *G. Bol* (Freiburg i. Br.).

Fejes, L.: Eine Bemerkung zur Approximation durch n -Eckringe. *Compositio Math.* **7**, 474—476 (1940).

Ein Ergebnis von E. Sas (dies. Zbl. **20**, 402) besagt, daß man jeder ebenen geschlossenen konvexen Kurve C mit dem Flächeninhalt F ein n -Eck vom Inhalt $\geq \frac{nF}{2\pi} \cdot \sin \frac{2\pi}{n}$ einbeschreiben kann; in Ergänzung hierzu zeigt Verf., daß man C für $n \geq 5$ ein n -Eck vom Inhalt $< \frac{n-2}{\pi} F \cdot \tan \frac{\pi}{n-2}$ umschreiben kann. Daraus folgt als Verschärfung eines früheren Ergebnisses des Verf. (dies. Zbl. **20**, 401), daß man C in einen n -Eckring einschließen kann derart, daß, wenn t_n und T_n die Flächeninhalte des inneren bzw. äußeren Ringpolygons sind, die Ungleichung

$$\frac{T_n - t_n}{T_n} < \sin^2 \frac{\pi}{n-2} \quad (n \geq 5)$$

gilt.

Harald Geppert (Berlin).

Bol, G.: Ein isoperimetrisches Problem. *Nieuw Arch. Wiskde* **20**, 171—175 (1940).

Die gewöhnliche isoperimetrische Ungleichung der Ebene läßt sich verschärfen, wenn man konvexe Bereiche mit endlich oder abzählbar unendlich vielen Ecken betrachtet. Unter allen konvexen Bereichen mit vorgegebenem Umfang und vorgegebenen Eckenwinkeln haben genau diejenigen den größten Flächeninhalt, die dadurch entstehen, daß man einem Kreis Kappen mit jenen Eckenwinkeln aufsetzt (sog. Kappenbereiche des Kreises). Der Beweis erfolgt wie im klassischen Falle mittels des Brunn-Minkowskischen Satzes. Sind ψ_i die Eckenwinkel, d. h. die Winkel zwischen den auf den äußersten Eckentangenten senkrechten Normalen, so gilt genauer:

$$U^2 \geq 4F \left\{ \pi + \sum (\operatorname{tg} \frac{1}{2} \psi_i - \frac{1}{2} \psi_i) \right\};$$

insbesondere ergibt sich für Polygone ($\sum \psi_i = 2\pi$) die isoperimetrische Ungleichung

$$U^2 \geq 4F \sum \operatorname{tg} \frac{1}{2} \psi_i,$$

und das Gleichheitszeichen steht nur bei solchen Polygonen, die einem Kreise umschrieben sind. Unter allen Polygonen mit vorgegebenem Umfang und vorgegebenen Eckenwinkeln haben also die einem Kreise umschriebenen, und nur diese, den größten Flächeninhalt. *H. Geppert* (Berlin).

Szekeres, G.: Ein Problem über mehrere ebene Bereiche. *Acta Litt. Sci. Szeged* **9**, 247—252 (1940).

Ziel der Arbeit ist ein elementarer Beweis des von Grünwald vermuteten Satzes: Die Summe F der Flächeninhalte von k ebenen Bereichen, deren Projektion auf jede beliebige Gerade eine Gesamtlänge $\leq d$ hat (wobei mehrfache Projektionen nur einfach zu rechnen sind), ist $\leq \frac{\pi}{4} d^2$. Der Beweis darf die Bereiche als konvex voraussetzen und schließt durch Induktion bezüglich k , da die Aussage für $k = 1$ mit der isoperimetrischen Ungleichung zusammenfällt. Vergrößert man jeden Durchmesser (d. h. Abstand paralleler Stützgeraden) der Länge h nach beiden Seiten je um λh , so wird für die neuen Bereiche die Gesamtlänge der Projektion $\leq d' \leq (1 + 2\lambda)d$, dagegen die Inhaltssumme $F' \geq F(1 + 2\lambda)^2$; vergrößert man also die Bereiche, bis zwei sich

berühren, und ersetzt diese dann durch ihre konvexe Hülle, so hat man die Elemente des Induktionsschlusses beisammen. Die Abschätzung für F' verwendet einen elementar beweisbaren Zwischensatz von selbständigem Interesse. Ein ebenes konvexes n -Eck der Seitenlängen a_i ($i = 1 \dots n$) habe den Flächeninhalt I ; h_i sei der Abstand der Seite a_i von der parallelen Stützgeraden; dann ist $\frac{1}{6} \sum_{i=1}^n a_i h_i \leq I \leq \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n a_i h_i$, wobei das linke Gleichheitszeichen nur für Dreiecke, das rechte nur für Mittelpunktspolygone gilt.

Harald Geppert (Berlin).

Sz. Nagy, Béla v.: Über ein geometrisches Extremalproblem. Acta Litt. Sci. Szeged 9, 253—257 (1940).

Der in der vorstehend besprochenen Arbeit genannte Grünwaldsche Satz läßt sich durch den folgenden Satz verschärfen: In der Ebene sei eine aus endlich vielen Kontinuen bestehende Menge vom zweidimensionalen Maß F gegeben; d_α sei das lineare Maß ihrer orthogonalen Projektion auf eine Gerade der Richtung α , $\mathfrak{M}(d_\alpha)$ das arithmetische Integralmittel von d_α über $0 \leq \alpha \leq 2\pi$ und $m = \min d_\alpha$; dann ist: $F \leq \frac{\pi}{4} m (2\mathfrak{M}(d_\alpha) - m)$, und das Gleichheitszeichen steht nur bei einer „rennbahnförmigen“ Menge, d. h. dem Parallelbereich einer Strecke. Der Beweis darf wieder die k Kontinuen als konvex annehmen und erfolgt durch Induktion nach k , indem Verf. durch Übergang zu inneren Parallelbereichen so lange verjüngt, bis ein Kontinuum zu Punkt oder Strecke geworden ist. — Der Satz ist einer Verallgemeinerung auf den R_n fähig; wenn F das n -dimensionale Maß und $\mathfrak{M}(d_\alpha)$ das Mittel über alle Richtungen des R_n bezeichnen, gilt: $F \leq \frac{k_n}{2^n} (\mathfrak{M}(d_\alpha))^n$, wobei k_n das Volumen der n -dimensionalen Einheitskugel ist und das Gleichheitszeichen nur für die n -dimensionale Kugel gilt.

Harald Geppert (Berlin).

Favard, J.: Sur le problème traité par MM. Szekeres et B. de Sz. Nagy. Acta Litt. Sci. Szeged 9, 258—260 (1940).

Die in den beiden vorstehend besprochenen Arbeiten behandelten Sätze können mit den klassischen isoperimetrischen Ungleichungen für konvexe Körper in Verbindung gebracht werden. Es seien im R_3 etwa drei konvexe Körper C_i mit den Inhalten V_i gegeben, C_{ik} sei die konvexe Hülle von C_i , C_k , C_{ikl} diejenige von C_i , C_k , C_l , C'_i der Vektorkörper zu C_i von einem festen Zentrum aus usw., und Γ der gemeinsame Kern der Körper $C'_1 + C'_2 + C'_3$, $C'_1 + C'_{23}$, $C'_2 + C'_{13}$, $C'_3 + C'_{12}$, C'_{123} . Für das Volumen V von Γ gilt die induktiv nach dem Verfahren von Szekeres (vgl. oben) zu beweisende Ungleichung: $V \geq 8 \sum V_i$. Dieselbe Ungleichung gilt bei entsprechenden Begriffsbildungen für n Körper. Nun ist die Breite von Γ in Richtung $\alpha \leq 2d_\alpha$, so daß die isoperimetrische Ungleichung zwischen V und der mittleren Breite von Γ den Grünwaldschen Satz einschließt.

Harald Geppert (Berlin).

Gerieke, H.: Über stützbare Flächen und ihre Entwicklung nach Kugelfunktionen. Math. Z. 46, 55—61 (1940).

Die Stützfunktion $h(\theta, \varphi)$ einer stützbaren Fläche (für den Begriff vgl. Geppert, dies. Zbl. 15, 410) läßt sich nach Kugelfunktionen in der Form

$$(1) \quad h(\theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n (a_{nm} \cos m\varphi + b_{nm} \sin m\varphi) \cdot P_n^m(\cos \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X_n$$

entwickeln. Die Mittelpunktskörper sind dann durch $a_{2n+1} = 0$ gekennzeichnet. Entsprechend der von Görtler (dies. Zbl. 17, 189; 18, 379) im ebenen Falle durchgeführten Untersuchung kennzeichnet Verf. die zu den Stützfunktionen $h_n = X_n$ gehörigen „Basisflächen“ der stützbaren Flächen durch die beiden Eigenschaften: 1. Die gemischte Oberfläche zweier verschiedener Basisflächen (h_m) und (h_n) ($m \neq n$) verschwindet, 2. unter den stützbaren Flächen (h), deren gemischte Oberfläche mit den Basisflächen (h_0), \dots , (h_{n-1}) verschwindet, liefert die zu (h_n) gehörige den Kleinstwert des

Verhältnisses $O(h): \int h^2 d\omega$ ($d\omega$ = Flächenelement der Einheitskugel). Die Koeffizienten a_{10}, a_{11}, b_{11} der Entwicklung (1) liefern die rechtwinkligen Koordinaten des Krümmungsschwerpunktes. Belegt man die Fläche mit einer Masse, deren Dichte proportional dem Gaußschen Krümmungsmaß ist, so betrachten wir diejenigen Achsen durch den Krümmungsschwerpunkt, für die das Trägheitsmoment der Massenbelegung ein Extremum wird; sie heißen die Trägheitsachsen der Fläche. Durch die Gleichungen $a_{21} = b_{21} = b_{22} = 0$ werden dann diejenigen Flächen gekennzeichnet, deren Trägheitsachsen beim Übergang zu beliebigen Parallelfächen ungeändert bleiben, die analoge Frage in der Ebene führt zu den Su-Ovalen.

H. Geppert (Berlin).

Zhitomirsky, O. K.: Sur la non-flexibilité des ovaloïdes. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 25, 347—349 (1939).

Ausgehend von den Gauß-Codazzischen Gleichungen werden zwei Hilfssätze, die sowohl Cohn-Vossen (Nachr. Ges. Wiss. Göttingen 1927, 125—134) wie auch Hopf-Samelson (dies. Zbl. 18, 234) zum Beweis der Starrheit der analytischen Eiflächen dienten und aussagen: a) die reellen Kongruenzpunkte liegen isoliert, b) der Index, welchen ein isolierter Kongruenzpunkt in bezug auf das Netz der Kongruenzrichtungen besitzt, ist nicht positiv, elementarer und direkter bewiesen. O. Volk.

Fejes, L.: Über den Schmiegunbspolyeder. Mat. fiz. Lap. 46, 141—145 u. dtsh. Zusammenfassung 145 (1939) [Ungarisch].

Ein Schmiegunbspolyeder P_n^* eines gegebenen konvexen Körpers K ist nach Verf. (dies. Zbl. 20, 77) ein solches konvexes n -Flach, welches unter sämtlichen konvexen n -Flächen P_n die kleinstmögliche Abweichung von K (Inhaltsmaß der Menge derjenigen Punkte, welche genau in einem der beiden Körper K und P_n enthalten sind) besitzt. In vorliegender Arbeit wird die Frage gestellt, ob eine Ecke des Schmiegunbspolyeders P_n^* im Innern von K liegen kann? Die Antwort ist im Falle $n > 5$ bejahend, im Falle $n \leq 5$ verneinend.

E. Egerváry (Budapest).

Dinghas, Alexander: Elementarer Beweis einer Ungleichung für konvexe Körper. Abh. preuß. Akad. Wiss., Phys.-Math. Kl. 1939, 1—20 (Nr 9).

Für konvexe Rotationskörper gelten nach Bonnesen [Quelques problèmes isopérimétriques. Acta math. 148, 123—178 (1926)] die Ungleichungen

$$\begin{aligned} 4\pi O &\leq M^2 - (M - 4\pi d)^2, \\ 3MV &\leq O^2 - (O - Md)^2, \\ 48\pi^2 V &\leq M^3 - (M - 4\pi d)^2(M + 8\pi d). \end{aligned}$$

(Verschärfungen von Ungleichungen von Minkowski.) Verf. beweist diese sehr einfach mit Hilfe einiger Integralidentitäten und erweitert dann die dritte auf beliebige konvexe Körper, wenn für $2d$ eine „mittlere Breite“ eingesetzt wird. Methode: „Versteifung“ (vgl. W. Blaschke, Kreis und Kugel, S. 103). Die erste Ungleichung hat Verf. bereits früher für beliebige konvexe Körper bewiesen, der entsprechende Beweis für die zweite steht noch aus.

G. Bol (Freiburg i. Br.).

Dinghas, Alexander: Beweis einer Ungleichung für konvexe Körper. Abh. preuß. Akad. Wiss., Phys.-Math. Kl. 1939, 1—13 (Nr 11).

Ein Beweis der Minkowskischen Ungleichung $O_{12} \geq \sqrt{O_{11}O_{13}}$ für die gemischte Oberfläche zweier Eikörper mit Hilfe trigonometrisch-integraltheoretischer Methoden (ohne Kugelfunktionen). Der Beweis wird zunächst für zwei Drehflächen mit derselben Achse geführt, allgemein folgt der Satz durch Versteifung nach Blaschke (vgl. Kreis und Kugel. Berlin 1910. S. 108). Es wird eine Verschärfung bewiesen, die auch Aufschluß über das Auftreten des Gleichheitszeichens gibt.

Bol (Freiburg i. Br.).

Alikoski, H. A.: Über das Sylvestersche Vierpunktproblem. Ann. Acad. Sci. Fennicae A 51, Nr 7, 1—10 (1939).

Von J. J. Sylvester stammt die Aufgabe, die Wahrscheinlichkeit p zu ermitteln, daß vier innerhalb eines gegebenen ebenen konvexen Bereiches liegende Punkte ein nichtkonvexes Viereck bestimmen. Verf. löst das Problem für das reguläre n -Eck

und findet:

$$p = \frac{9 \cos^2 \omega + 52 \cos \omega + 44}{9 n^2 \sin^2 \omega} \quad \left(\omega = \frac{2\pi}{n} \right).$$

In den Spezialfällen $n = 3, 4, 6$ sowie für den Kreis ($n = \infty$) ergeben sich bekannte Werte früherer Literatur. Mit wachsendem n nimmt p beständig ab. In der Tat nimmt p einen größten und kleinsten Wert bei Dreieck und Ellipse an, wie W. Blaschke [Ber. math.-phys. Kl., Leipzig 69, 436—453 (1917)] gezeigt hat. H. Hadwiger (Bern).

Delvendahl, Otto: Die Singularitäten der Elementarkurven. J. reine angew. Math. 182, 54—59 (1940).

Es sei $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}^+ + \mathfrak{B}^-$ ein Bogen im (projektiven) R_n mit $n \geq 2$, welcher überall Schmiegeebenen aller Dimensionen $1, \dots, n-1$ besitzt, die sich längs \mathfrak{B} stetig ändern. Überdies seien \mathfrak{B}^+ und \mathfrak{B}^- Bogen von der Ordnung und (folglich) von der Klasse n , wobei \mathfrak{B}^+ und \mathfrak{B}^- lediglich den (End-) Punkt Q gemeinsam haben. Es gibt dann bekanntlich, je nach der gegenseitigen Lage der Schmiegehalbebenen an \mathfrak{B}^+ und \mathfrak{B}^- in Q , im ganzen 2^n verschiedene Typen für die in Q vorliegende Singularität. In Verallgemeinerung einer Behandlung der Fälle $n \leq 3$ durch M. Linsman [Acad. Belgique Bull. Cl. Sci. (5) 22, 688—698, 873—884 (1936); dies. Zbl. 14, 275 u. 15, 78] und auf anderem Wege als F. Denk [dieser ohne Betrachtung der Klasse, S.-B. physik.-med. Soz. Erlangen 67/68, 1—3 (1935/36); dies. Zbl. 15, 411] und P. Scherk [Čas. math. fys. 66, 165—191 (1937); dies. Zbl. 16, 227], welche beide den Fall eines beliebigen $n \geq 2$ behandeln, leitet Verf. für jeden der 2^n Fälle eine untere Schranke für Ordnung und Klasse von \mathfrak{B} in Q her sowie je zwei zueinander duale Kennzeichnungen durch Angabe eines Schemas von n , etwa (vgl. Scherk) mit 1 oder 2 besetzten Stellen, wobei der Übergang zum dualen Schema durch Umkehrung der Reihenfolge der Stellen erfolgt. Durch Projektion eines Bogens der Ordnung $2n$ im R_{2n} auf einen R_n werden sämtliche 2^n Typen verwirklicht. O. Haupt (Erlangen).

Klassische theoretische Physik.

● Debye, P., F. Simon, M. Wiersma, C. V. Raman, M. Polanyi et B. van der Pol: Physique générale. (Actualités scient. et industr. Nr. 718.) Paris: Hermann & Cie. 1938. 80 pag. Frcs. 29.—.

Mechanik:

Kryloff, N., et N. Bogoliùboff: Sur les équations de Focke-Planck déduites dans la théorie des perturbations à l'aide d'une méthode basée sur les propriétés spectrales de l'hamiltonien perturbateur. (Application à la mécanique classique et à la mécanique quantique.) Ann. Chaire Phys. Math. Kiev 4, 81—157 (1939) [Russisch].

Ein mechanisches System mit vielen Freiheitsgraden und einer mehrfach periodischen Störung mit statistisch verteilten Phasen wird statistisch behandelt. Aus den Bewegungsgleichungen werden mit einer Störungsrechnung unter Benutzung von „Winkel- und Wirkungsvariablen“ Differentialgleichungen für gewisse Wahrscheinlichkeitsdichten, die den Zustand des mechanischen Systems kennzeichnen, herausgerechnet. Die Rechnung wird für die klassische Mechanik wie für die Quantenmechanik durchgeführt; der Zusammenhang der ei ander entsprechenden Ergebnisse wird aufgezeigt. F. Hund (Leipzig).

Caldirola, Piero: Sui vari tipi di forze derivanti da potenziali generalizzati. Ist. Lombardo, Rend., III. s. 72, 379—386 (1939).

Ausgehend von der allgemeinen Lagrangeschen Gestalt der Bewegungsgleichungen wird gezeigt, wie die Kräfte aussehen müssen, wenn ein Potential vorhanden ist. Es wird hiebei zugelassen, daß in den Ausdrücken für Kraft und Potential auch die Ableitungen der Koordinaten nach der Zeit vorkommen. Besonders wird der Fall ausgeführt, daß im Ausdruck für das Potential von den Ableitungen nur die ersten vorkommen. Die Ausdrücke für die Kraft enthalten dann in der Regel auch die zweiten

Ableitungen der Koordinaten nach der Zeit, außer wenn im Ausdruck für das Potential die ersten Ableitungen nur linear vorkommen. *G. Schrutka* (Wien).

Castoldi, Luigi: Osservazioni sulla funzione hamiltoniana e sull'energia totale di un sistema dinamico. Boll. Un. Mat. ital., II. s. 1, 451—457 (1939).

Für ein holonomes konservatives mechanisches System mit Bindungen, die von der Zeit abhängen, werden notwendige und hinreichende Bedingungen dafür aufgestellt, daß die Hamiltonfunktion und die Gesamtenergie zusammenfallen bzw. sich nur um eine Konstante unterscheiden. *E. Hölder* (Braunschweig).

Arrighi, G.: Sul moto impulsivo dei sistemi anolonomi. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 29, 472—477 (1939).

On considère les équations de mouvement d'un système matériel S à liaisons non holonomes, sans frottement, dans le cas du choc et des percussions. En indiquant avec \dot{q}_h les n paramètres lagrangiens de S et avec e_α les m caractéristiques cinétiques, on a

$$\dot{q}_h = \sum_{\alpha}^m \eta_{h\alpha} e_\alpha + \gamma_h, \quad \Delta \dot{q}_h = \sum_{\alpha}^m \eta_{h\alpha} \Delta e_\alpha$$

où l'on indique avec $\eta_{h\alpha}$, γ_h des fonctions des q_h et t et avec Δ l'accroissement produit par le choc, q_h et t étant à traiter comme constantes par rapport au Δ . Si T^* est la force vive de S exprimée à l'aide des e_α , les équations de mouvement reçoivent la forme

$$\Delta \frac{\partial T^*}{\partial e_\alpha} = \psi_\alpha,$$

ψ_α étant les composantes de l'impulse total. Une autre forme de ces équations, analogue à la forme donnée par Appell aux équations de mouvement, est indiquée.

G. Vranceanu (București).

Datzeff, Assène: Sur les orbites stables d'un problème réduit de trois corps. C. R. Acad. Sci., Paris 207, 977—979 (1938).

Eine störungstheoretische Stabilitätsbetrachtung legt dem Verf. nahe, im Bohrschen Wasserstoffatommodell das Elektron als System einer geladenen Masse (m_1 , $-e$) und einer Masse m_2 , das Proton als geladene Masse (m_3 , $+e$) aufzufassen. *E. Hölder* (Braunschweig).

Pedersen, Peder: Fourier expansions for periodic orbits around the triangular libration points. Danske Vid. Selsk., Math.-fys. Medd. 17, Nr 4, 1—16 (1939).

Im besonderen Fall, wo sich das Massenprodukt wenig von $\frac{1}{27}$ unterscheidet, wird die Fourierentwicklung für die periodischen Bahnen in der Nachbarschaft des Dreieckslibrationspunktes um einen Schritt weitergetrieben — auf Grund einer früheren Untersuchung des Verf. [Monthly Not. Roy. Astron. Soc. 94, 167—185 (1933); Publ. Københavns Observ. Nr 91; dies. Zbl. 8, 377]. Das Resultat ist eine vollständige Übersicht über die Verteilung der kurz- bzw. langperiodischen Bahnen. *E. Hölder*.

Sterne, Theodore Eugene: The gravitational motion of a pair of rigid bodies. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 25, 468—474 (1939).

Bestätigung einer Untersuchung von K. Walter [Veröff. Univ.-Sternw. Königsberg 3 (1933)] über die kleinen Librationen in der Bahnebene zweier starrer Körper, die sich nahezu in Ellipsen umeinander bewegen. *E. Hölder* (Braunschweig).

Fabre, Hervé: Librations des apsides de certaines orbites peu excentriques. C. R. Acad. Sci., Paris 209, 151—153 (1939).

Verf. betrachtet in dieser Arbeit die Wirkungen der Exzentrizität der Jupiterbahn auf die Planetoidenbahn, während er in seinen früheren Arbeiten (dies. Zbl. 21, 164 u. 362) die Jupiterbahn als kreisförmig betrachtet hat. Er folgert, daß die Bewegung des Perihels der Planetoidenbahn eine Libration um das des Jupiters ist, wenn die Störung infolge einer Kommensurabilität besonders heftig ist. Wegen der durch die Störungen bewirkten Änderungen würden allerdings diese Librationen nur eine Zeitlang stattfinden.

G. Schrutka (Wien).

Sestini, G.: Sulla dinamica di un particolare sistema piano. Boll. Un. Mat. ital., II. s. 1, 436—444 (1939).

Ein materielles System Σ in ebener Bewegung besteht aus zwei starren Scheiben S_0

und S_1 , die durch ein Gelenk P_0 miteinander verbunden sind. Während der Bewegung bleibt die Tangente zu der vorgegebenen Bahnkurve c_0 von P_0 fest mit S_0 verbunden, während gleichzeitig ein Punkt P von S_1 gezwungen wird, eine Traktrix c von c_0 zu beschreiben, die ebenfalls materiell vorgegeben ist. Beide Kurven werden glatt vorausgesetzt. An einem Punkte Q_0 von S_0 greift eine Kraft \mathfrak{F} an. Gesucht werden die von diesen Kurven auf Σ ausgeübten Reaktionskräfte und ihr Verhalten in Abhängigkeit von der Form von c_0 und c und der Massenverteilung von Σ . Ausführung für einige Sonderfälle und Anwendung auf die Bewegung von zweirädrigen Fahrzeugen wie Fahrrädern. *Th. Pöschl* (Karlsruhe).

Elastizität, Akustik:

Frola, E.: L'estensione dei teoremi di Castigliano alla dinamica. Atti Accad. Sci. Torino 74, 438—447 (1939).

Die Castiglianoschen Sätze, die bei einem ruhenden elastischen Medium durch Aufstellung der im Körper aufgespeicherten Formänderungsarbeit und durch Differentiation nach den Kräften (bzw. Verschiebungen) die Verschiebungen (bzw. die Kräfte) auszurechnen gestatten, werden auf den Fall übertragen, daß die Verschiebungen zeitabhängig sind. Es wird eine Formel aufgestellt für die Verschiebung $u(P, t)$ an einer bestimmten Raumstelle P zu einem Zeitaugenblick t . An Stelle der Formänderungsarbeit tritt das Hamiltonsche Integral (enthaltend potentielle und kinetische Energie), an Stelle der Ableitung der Quotient zweier Variationen (im Zähler z. B. das Integral über eine Umgebung von P und über ein kurzes Zeitintervall, das den betrachteten Zeitaugenblick t einschließt). Im Grenzfall, daß Umgebung und Zeitintervall gegen Null gehen, strebt der Quotient gegen die gesuchte Verschiebung $u(P, t)$.

Collatz (Karlsruhe).

Mises, R. von: Über den singulären Punkt zweiter Ordnung im ebenen Spannungsfeld. Stephen Timoshenko-Festschr. 147—154 (1938).

Verschwindet an einer Stelle eines ebenen Spannungsfeldes die Hauptschubspannung (der Mohrsche Spannungskreis entartet zu einem Punkt), so handelt es sich um einen singulären Punkt. Die beiden Hauptspannungen σ_x und σ_y werden einander gleich und die Schubspannung τ_{xy} verschwindet für jede beliebige Wahl der Koordinatenachsen. Liegt der Koordinatenursprung im singulären Punkt, und beginnen die Entwicklungen für $\sigma_x - \sigma_y$ und τ_{xy} mit Gliedern erster Ordnung, so handelt es sich um einen singulären Punkt erster Ordnung (vgl. dies. Zbl. 18, 428). Für den singulären Punkt zweiter Ordnung beginnen die Entwicklungen mit den Gliedern zweiter Ordnung. Wie bereits L. Föppl abgeleitet hat (Der singuläre Punkt zweiter Ordnung. Mitt. Mech. Techn. Labor. T. H. München, H. 34), läßt sich für den Winkel ϑ der Hauptspannungsrichtung in Abhängigkeit vom Winkel φ des Radiusvektors eine ähnliche Beziehung ableiten wie beim singulären Punkt erster Ordnung. Verf. schreibt diese aus Gleichgewichts- und Kompatibilitätsbedingungen folgende Beziehung in der Form

$$\operatorname{tg}(2\vartheta - \alpha) = \frac{\sin 2\varphi}{c + \cos 2\varphi}.$$

Hierin sind α und c Konstante. Die zugehörigen Integralkurven sind für $c = 0$ gleichseitige Hyperbeln, für $c = 1$ Hyperbeln mit einem Asymptotenwinkel von 120° , für $c = \infty$ Gerade, die parallel zu den Koordinatenachsen verlaufen. Verf. diskutiert auch die Zwischenwerte von c und zeigt, wie sich der Verlauf der Integralkurven für wachsendes c allmählich von der einen Grundform zur nächsten hin verlagert. Hierbei verwendet Verf. mehrere Sätze über Integralkurven homogener Differentialgleichungen, für die die erforderlichen Beweise anderweitig veröffentlicht werden sollen. Am Schlusse der Arbeit bemerkt Verf., daß es außer den singulären Punkten erster und zweiter Ordnung auch solche geben müsse, die weder der einen, noch der anderen Art, noch höherer Ordnung angehören, da nämlich z. B. $\sigma_x - \sigma_y$ mit Gliedern erster Ordnung, τ_{xy} dagegen mit Gliedern zweiter Ordnung beginnen kann oder umgekehrt. *H. Neuber.*^{oo}

Barta, J.: Über die gleichmäßig gespannte und beliebig belastete Platte. *Mat. természett. Értes.* 58, 26—33 u. deutsch. Zusammenfassung 34 (1939) [Ungarisch].

Sobrero, Luigi: Sollecitazioni elastiche di un sistema piano con foro rinforzato. *Mem. Accad. Ital.* 10, 105—141 (1939).

Die an früherer Stelle (s. dies. Zbl. 10, 207) im Auszug veröffentlichte Berechnung der Spannungsverteilung in der gelochten Scheibe wird hier in größerer Ausführlichkeit wiedergegeben und ergänzt. Die Ergänzungen betreffen zunächst die Bestimmung der elastischen Konstanten p, q, r, s des den Rand des Loches versteifenden Ringes für einige Ringprofilformen, sodann den Vergleich der Ergebnisse mit dem als Scheibe gerechneten Rechteckring und mit den Grenzfällen starren bzw. verschwindenden Ringes. Ein zweiter Teil der Arbeit schildert spannungsoptische Messungen, deren Ergebnisse mit denen der Theorie in sehr guter Übereinstimmung stehen.

Marguerre (Adlershof).

Mushtari, K. M.: On a method for obtaining some results in solving Saint Venant problems of torsion and on the flexure of prismatic bodies. *Appl. Math. a. Mech.*, N. s. 1, 427—440 u. engl. Zusammenfassung 440 (1938) [Russisch].

In der vorliegenden Arbeit werden die früheren Untersuchungen des Verf. [Trans. Kazan Aviaz. Inst. 17 (1933) und Trans. K. J. J. K. S. 53 (1935)] über Torsion und Biegung von prismatischen Stäben mit einachsiger und zweiachsiger Querschnittssymmetrie zusammengefaßt. Unter Verwendung von Polynomen mit ganzzahligen und gebrochenen Exponenten in der komplexen Variablen z für die Torsions- und Biegungsspannungsfunktion werden exakte Lösungen für Stäbe mit folgenden Querschnittsumrissen gegeben: Epizykloide, die durch Abrollen eines Punktes eines Kreises auf einem vom gleichen Halbmesser entsteht (im Sonderfall eine Kardioide) und Lemniskate von Both. Für die letzte Querschnittsform hat N. Muschelišvili (s. „Einige Aufgaben der Elastizitätstheorie.“ 1933) dieselbe Lösung der Torsionsaufgabe mit Hilfe der konformen Abbildung hergeleitet. Die Lösung der Biegungsaufgabe für den Stab mit Kardioide als Querschnittsumriß stimmt mit der später von Shepherd gefundenen überein. — Der Verf. verweist darauf, daß die von ihm verwendete Form der Spannungsfunktion (Polynome mit gebrochenen Exponenten in z) auf exakte Lösungen auch für Stäbe mit anderen Querschnittsformen führen kann.

A. Kromm (Berlin-Adlershof).

Love, A. E. H.: Boussinesq's problem for a rigid cone. *Quart. J. Math.*, Oxford Ser. 10, 161—175 (1939).

Verf. stellt sich die Aufgabe, den Druck (Normaldruck) in Richtung der positiven z -Achse auf der Begrenzungsfläche $z = 0$ eines den positiven Halbraum ausfüllenden festen Körpers zu bestimmen, wenn die Verschiebungen w im Körper in Richtung der z -Achse bestimmt vorgegeben sind. Die gedrückte Fläche soll eine Kreisscheibe mit dem Radius c um den Nullpunkt der Ebene $z = 0$ sein. w wird in der Form $w = w_0 - \rho \cotg \alpha$ vorgegeben, wobei ρ den Radiusvektor in der z -Ebene bezeichnet, so daß ρ der Ungleichung $0 \leq \rho \leq c$ genügt. α ist ein fester Winkel. Die Endpunkte der Verschiebungsvektoren bestimmen eine Kegelfläche, deren Spitze den Abstand w_0 von der z -Ebene hat. Auf Grund der allgemeinen Untersuchungen von Boussinesq und Love wird der Druck durch eine Funktion V bestimmt, die den folgenden drei Bedingungen genügt: 1. V ist außerhalb der gedrückten Fläche überall harmonisch. 2. Auf der gedrückten Fläche ist $V = aw$ (a konstant). 3. Auf der Fläche $z = 0$ außerhalb der gedrückten Fläche ist $\frac{\partial V}{\partial z} = 0$. — Der Druck p berechnet sich dann aus der Formel: $p = -\frac{1}{2\pi} \lim_{z \rightarrow +0} \left(\frac{\partial V}{\partial z} \right)$. Verf. gibt V als eine unendliche Reihe von sphärisch harmonischen Funktionen an. Daraus kann dann p in sehr einfacher geschlossener Form erhalten werden. Außerdem gelingt es Verf., die Komponenten der Verschiebungen und der Spannungen in jedem Punkte der gedrückten Fläche in geschlossener Form darzustellen.

U. Wegner (Heidelberg).

Sezawa, Katsutada, and Kiyoshi Kanai: On the packet velocity of dispersive elastic waves of irregular form. Bull. Earthquake Res. Inst. Tokyo 17, 208—232 (1939).

Die Ausbreitung eines abgehackten periodischen Wellenzuges, sowie eines einzelnen glockenförmigen oder rechteckigen Wellenimpulses im dispergierenden Mittel wird für die Fälle der Dispersionskurven $c = A + B/f$ und $c = A + Bf$ (c Phasengeschwindigkeit zur Kreiswellenzahl f) ausgerechnet. Die dazu notwendigen Fourierintegrale werden mit einer Sattelpunktmethode auf komplexem Weg ausgewertet, wobei eine große Zahl von Fallunterscheidungen gemacht werden muß. Obwohl die Wellengruppe beim Fortschreiten ziemlich komplizierten Verformungen unterliegt, glauben die Verff. schließen zu müssen, daß der Energieschwerpunkt in all den verschiedenen Fällen mit der Gruppengeschwindigkeit des Grenzfalls $\lambda \rightarrow \infty$ wandert. *Fues.*

Mindlin, J. A.: Propagation of elastic waves in two dimensions. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 25, 289—292 (1939).

Mathematische Behandlung der Schwingungen einer Ebene mit kreisförmiger innerer Begrenzung; es seien beliebige Anfangsbedingungen und beliebige Verschiebungen auf dem Kreisrand vorgeschrieben. Die Verschiebungen werden in üblicher Weise durch Differentiation nach r, ϑ (Polarkoordinaten in der Ebene) aus zwei Funktionen φ, ψ abgeleitet, die der Wellengleichung genügen; die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der φ - und ψ -Wellen ist verschieden und in bekannter Weise durch die Elastizitätskonstanten und die Dichte bestimmt. Für φ und ψ erhält man das Problem, das in der vorhergehenden Arbeit (s. dies. Zbl. 22, 227) gelöst wurde. *Bechert.*

Kármán, Th. von: Use of orthogonal functions in structural problems. Stephen Timoshenko-Festschr. 114—124 (1939).

Die von S. Timoshenko angewendete Methode zur angenäherten Integration der Differentialgleichung des über die Länge elastisch gestützten Biegestabes wird dadurch verbessert, daß die Lösung angesetzt wird als Summe eines leicht zu gewinnenden Gliedes ohne Berücksichtigung der elastischen Stützung und eines Korrekturgliedes, dessen Fourierentwicklung rasch konvergiert. Die Methode wird verallgemeinert und in Zusammenhang mit der Theorie der erzwungenen Schwingungen gebracht.

K. Hohenemser (Berlin).°°

● Rytov, S.: Acoustique théorique et pratique. Exposés publiés sous la direction de Léon Brillouin. I. Diffraction de la lumière par les ultra-sons. (Actualités scient. et industr. Nr. 613.) Paris: Hermann & Cie. 1938. 51 pag. Frs. 15.—.

Pohlman, R.: Über die Möglichkeit einer akustischen Abbildung in Analogie zur optischen. Das Problem der Sicht durch undurchsichtige Medien. Z. Physik 113, 697—709 (1939).

Savin, G.: On some problems of the theory of elasticity of anisotropic media. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 23, 217—220 (1939).

Bei anisotropen Stoffen, welche bezüglich ihres elastischen Verhaltens drei Symmetrieebenen besitzen, läßt sich nach Lekhnitski das ebene Spannungsproblem auf die Ermittlung zweier komplexer Funktionen zurückführen, $\varphi(z_1)$ und $\Phi(z_2)$, wobei $z_1 = x + s_1 y$ und $z_2 = x + s_2 y$ gesetzt ist. Dabei sind $s_1 = \alpha_1 + i\beta_1$ und $s_2 = \alpha_2 + i\beta_2$ komplexe Variable. Ferner sind β_1 und β_2 Wurzeln der Gleichung

$$\beta_{11}s^4 + 2\beta_{16}s^3 + (2\beta_{12} + \beta_{66})s^2 - 2\beta_{26}s + \beta_{22} = 0.$$

Die Konstanten β_{ik} stehen mit den elastischen Konstanten des Stoffes in Zusammenhang. Für die Spannungskomponenten gilt dann

$$\sigma_x = 2 \operatorname{Re}[s_1^3 \varphi'(z_1) - s_2^3 \Phi'(z_2)],$$

$$\sigma_y = 2 \operatorname{Re}[\varphi'(z_1) - \Phi'(z_2)],$$

$$\tau_{xy} = -2 \operatorname{Re}[s_1 \varphi'(z_1) - s_2 \Phi'(z_2)].$$

Als Beispiele werden angegeben: das elliptische Loch im Zugstab; die Halbebene mit beliebiger Belastung, insbesondere mit gleichmäßig verteilter Last, mit Einzellast

unter einem beliebigen Winkel, schließlich mit Einzellast senkrecht zum Rand. Die Ausdrücke für die Spannungskomponenten werden nur im letztgenannten Falle angegeben.

H. Neuber (Braunschweig).^{oo}

Hydrodynamik:

Ertel, Hans: Über ein allgemeines Variationsprinzip der Hydrodynamik. Abh. preuß. Akad. Wiss., Phys.-Math. Kl. 1939, 1—9 (Nr 7).

Außer einer Bemerkung über den Spezialfall der Piezotropie (d. h. des homogenen Gases) bringt die Arbeit hauptsächlich für den allgemeinen baroklinen Fall die Herleitung der Lagrangeschen Bewegungsgleichungen aus einem (über die Zeit und die Lagrangeschen Numerierungskoordinaten a, b, c erstreckten) Extremalintegral. Gegenüber dem der Mechanik der Kontinua schon längst zugrunde gelegten Hamiltonschen Prinzip (vgl. etwa Enzyklopädie d. math. Wiss. IV 4, Art. 30, S. 656) hat die vom Verf. angegebene Form des Variationsprinzips den Nachteil, daß in der Lagrange-funktion der Druck p als Funktion $p(a, b, c, t)$ vorkommt, die von vornherein nicht bekannt ist.

E. Hölder (Braunschweig).

Green, A. E.: The forces acting on a circular arc aerofoil in a stream bounded by a plane wall. Proc. London Math. Soc., II. s. 46, 19—54 (1939).

Verf. betrachtet eine Strömungsaufgabe, wobei eine reibungslose Flüssigkeit wirbelfrei und stationär parallel zu einer ebenen Wand strömt. In diesen zweidimensional aufzufassenden Flüssigkeitsstrom wird ein Kreisbogen hineingestellt. Gesucht sind die auf diesen Kreisbogen wirkenden Kräfte. Er unterscheidet 3 Fälle: der Kreis des Bogens schneidet die Gerade (ebene Wand) in 2 Punkten, berührt sie oder schneidet sie überhaupt nicht. In jedem dieser 3 Fälle wendet er zunächst eine lineare Transformation an und darauf eine Transformation mittels elliptischer Funktionen. Durch Anwendung der Reihenausdrücke für die in Betracht kommenden Funktionen gelangt er zu numerisch brauchbaren Formeln. Zur Berechnung der auf den Kreisbogen wirkenden Kräfte verwendet er eine Integralformel von Blasius. Hieraus ergeben sich auch die Drehmomente. Die sehr verwickelten Endformeln werden für die drei obengenannten Fälle besonders betrachtet. Als weitere Sonderfälle werden behandelt: ein Kreisbogenstück mit unendlich großem Radius in endlichem Abstand von einer ebenen Wand und ein Kreisbogen in unendlichem Abstand von einer solchen Wand. Die numerische Auswertung der Formeln ist sehr langwierig und wird nur für wenige Spezialfälle durchgeführt und diskutiert.

M. J. O. Strutt (Eindhoven).

Mineo, C.: Forma d'un pianeta dedotta dai valori della gravità in superficie. I. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 29, 529—535 (1939).

In der Nachbarschaft der ruhenden Kugel bestimmt Verf. für die Deformation der Oberfläche und die dort herrschende Schwerkraft Potenzentwicklungen nach der Winkelgeschwindigkeit der Gleichgewichtsfigur, in denen die Koeffizienten einem System von Integrodifferentialgleichungen genügen. Die erste Approximation ist die Stokesche. Auf den Konvergenzbeweis will der Verf. in einer weiteren Mitteilung eingehen.

E. Hölder (Braunschweig).

Thermodynamik:

Brønsted, J. N.: Grundlage und Formulierung der thermodynamischen Hauptsätze. Danske Vid. Selsk., Math.-fys. Medd. 16, Nr 10, 1—83 (1939) [Dänisch].

Kritik der üblichen Formulierung der ersten zwei Hauptsätze der Thermodynamik. Des Verf. Darstellung einer zweckmäßigen Ableitung der zwei Hauptsätze: Als Grundlage dienen die Begriffe Quantität K und Potential P ; Grundprozesse bestehen aus einem Quantitätstransport. Alle Naturerscheinungen lassen sich aus solchen Grundprozessen zusammensetzen. Jedem Grundprozeß ist ein Arbeitsverbrauch δA zugeordnet, der gleich ist $\delta K \cdot (P_1 - P_2)$, Arbeitsprinzip. Der thermische Grundprozeß ist Entropietransport zwischen verschiedenen Temperaturen; Entropie ist reversibel transportierbar. Zugleich mit der Entropie wird Wärme zugeführt: $\delta Q = T \delta S$; Wärme ist nur irreversibel transportierbar. Irreversible Prozesse verlaufen unter Arbeitsverbrauch und Wärmeentwicklung, $\sum \delta A > 0$, $\delta Q > 0$; Wärme-

prinzip. Der Arbeitsverbrauch beim irreversiblen Prozeß ist proportional der energetischen Wärmeentwicklung; Äquivalenzprinzip, $\sum \delta A = \delta Q$ (energetische Wärmeentwicklung ist der Wärmeüberschuß, der bei der reversiblen Führung zugeführt werden muß). Die drei Prinzipien können zusammengefaßt werden in der Formel: $\sum \delta A = \delta Q \geq 0$. Der erste Hauptsatz entspricht dem Äquivalenzprinzip; wenn der zweite Hauptsatz durch $\delta S \geq 0$ beschrieben wird, ist er inhaltsgleich mit dem Wärmeprinzip. *Bechert (Gießen).*

Kneissler-Maixdorf, L.: Zur Thermodynamik elektromagnetischer Vorgänge. Arch. Elektrotechn. 33, 721—732 (1939).

Systematische Einführung des substantiellen Differentialquotienten nach der Zeit in den Energieerhaltungssatz und die Entropiedefinition. Erläuterung der aufgestellten Gleichungen an Beispielen, insbesondere aus der Elektrodynamik. *Bechert (Gießen).*

Weizsäcker, C. F. v.: Der zweite Hauptsatz und der Unterschied von Vergangenheit und Zukunft. Ann. Physik, V. F. 36, 275—283 (1939).

Begründung der Behauptung: Dem zweiten Hauptsatz liegt eine objektive, allgemeine Eigenschaft der Erfahrung zugrunde, nämlich daß das Vergangene unabänderlich geschehen und grundsätzlich als bekannt zu betrachten ist, das Zukünftige dagegen noch unbestimmt ist. *F. Hund (Leipzig).*

Fischer, V.: Zur Thermodynamik der Sauerstoff-Stickstoff-Gemische. Ann. Physik, V. F. 36, 381—396 (1939).

Pines, B.: Contribution to the thermodynamics of second order phase transition. Ž. eksper. teoret. Fiz. 9, 963—968 (1939) [Russisch].

Meixner, J.: Zur Thermodynamik der thermomechanischen Effekte des Helium II. (Inst. f. Theoret. Physik, Univ. Gießen.) Ann. Physik, V. F. 36, 578—584 (1939).

Die Erscheinungen bei der Strömung von Helium II durch feinste Kapillaren werden in Analogie gesetzt zu den thermoelektrischen Erscheinungen des Peltier- und des Thomsons Effektes. Es entspricht dabei dem elektrischen Strom der Fluß des flüssigen Heliums durch die Kapillare, der thermoelektrischen Feldstärke ein Druckgradient. Es wird ein phänomenologischer Ansatz für die in Rede stehenden thermomechanischen Erscheinungen gegeben, der den bisherigen Erfahrungen genügt. Die Anwendbarkeit des zweiten Hauptsatzes der Wärmelehre wird erörtert. Sie ist infolge der Wärmeleitung und des Auftretens von Reibungswärme denselben Einschränkungen unterworfen wie bei den thermoelektrischen Effekten. *Maue (München).*

Young, Gale: Streaming in diffusion fields. Bull. math. Biophysics 1, 177—184 (1939).

Elektrodynamik:

Sommerfeld, A.: Über die Dimensionen der elektromagnetischen Größen. Ann. Physik, V. F. 36, 335—339 (1939).

Pastori, Maria: Il principio variazionale di Volterra e gli invarianti del campo elettromagnetico. Ist. Lombardo, Rend., III. s. 72, 301—308 (1939).

Geringe Umformungen der Volterraschen Form des elektrodynamischen Variationsprinzips, aus dem die Maxwellschen Gleichungen gewonnen werden können, wenn man noch die Erhaltung der Elektrizitätsmenge als Zusatzforderung hinzunimmt. *Bechert.*

● **Diesselhorst, Hermann:** Magnetische Felder und Kräfte mit einer Übersicht über die Vektorenrechnung. Eine mit Zusätzen versehene Sonderausgabe des Beitrages „Elektrodynamik“ aus Handbuch der Elektrizität und des Magnetismus. Bd. 4 (1920). Mit einem Geleitwort v. Fritz Emde. Leipzig: Johann Ambrosius Barth 1939. V, 215 S. u. 56 Abb. RM. 8.—

Im Geleitwort bemerkt F. Emde, daß der vorliegende Beitrag „Elektrodynamik“ bisher in einem Band von über 1300 Seiten vergraben lag und somit auch von Fachleuten leider nur selten benutzt wurde. Der erste Abschnitt von 60 Seiten ist der Vektoren- und Affinorenrechnung gewidmet, wobei besonders den Anforderungen der Elektrodynamik Rechnung getragen wurde. Mancher Satz und manche Formel finden sich in dieser Form anderwärts nicht. Bei der Behandlung der experimentellen Grundlagen der Elektrodynamik geht Verf. in besonders klarer Weise von den Beiträgen Oerstedts, Ampères u. a. aus. Er entwickelt dann die ponderomotorischen Wirkungen in Systemen von Magneten und quasi-

stationären elektrischen Strömen, sodann die pondero-motorischen Wirkungen des magnetischen Feldes (insbesondere die Wirkungen magnetischer Felder auf Magnete und magnetisierbare Substanzen) und schließlich behandelt er Systeme aus Magneten und elektrischen Strömen. Aus der Vorbemerkung, daß das Schrifttum lediglich bis 1917 berücksichtigt ist, ergibt sich bereits, daß es sich hier um eine Abhandlung der „klassischen“ Elektrodynamik ohne Berücksichtigung moderner Entwicklungen handelt. Gerade dieser klassische Teil der Elektrodynamik und die Formeln für die verschiedenen Wirkungen elektromagnetischer Felder sind im Schrifttum schwer aufzutreiben und sind für die Anwendungen hier in einer Form zusammengestellt, die jeder Fachmann auf das wärmste begrüßen wird. *M.J.O.Strutt.*

Grünberg, G.: Über ein Verfahren zur Lösung der Grundaufgabe der Elektrostatik und verwandter Probleme. Ž. eksper. teoret. Fis. 8, 221—252 (1938) [Russisch].

Das neue vom Verf. angegebene Verfahren besteht in der Aufstellung eines Simultansystems von Integralgleichungen zweiter Art für die freien Flächenladungen. In einfachen Fällen (Ebene, Kreiszylinder, Kugel) sind die Vereinfachungen so groß, daß eine Auflösung der Integralgleichungen überhaupt entbehrlich wird. An einem komplizierten Beispiel, welches das ebene Problem von mehreren von einem Punkt ausgehenden ebenen Trennungsf lächen behandelt, wird das allgemeine Verfahren auseinandergesetzt, wobei zur Lösung der Integralgleichungen von der Riemann-Mellinschen Umkehrung Gebrauch gemacht wird. Durch Betrachtung einiger Grenzfälle zeigt der Verf., daß seine Ergebnisse durch Spezialisierung mit bereits bekannten übereinstimmen.

Otto Heymann (Berlin-Siemensstadt).^{oo}

Becker, R.: Die Bremsung der Magnetisierung durch mikroskopische Wirbelströme. Ann. Physik, V. F. 36, 340—348 (1939).

Bei der Drehung des Magnetisierungsvektors \mathfrak{J} oder bei einer Wandverschiebung in einem ferromagnetischen Körper entstehen Wirbelströme durch die Änderung der Magnetisierung; die Wirbelströme erzeugen ein Magnetfeld, das auf die primären Vorgänge der Magnetisierungsänderung hemmend wirkt. Wird \mathfrak{J} als gegeben angesehen, so kann das entstehende Bremsfeld \mathfrak{H} aus den Maxwellschen Gleichungen berechnet werden. Anwendung auf die Verschiebung einer Wand in einem Zylinder; zu beiden Seiten der Wand soll die Magnetisierung entgegengesetzt gleich sein, die Wand soll sich von einem gegebenen Zeitpunkt an mit konstanter Geschwindigkeit senkrecht zu ihrer Ebene bewegen. Das Bremsfeld auf der Zylinderachse wird berechnet und seine Zeitabhängigkeit diskutiert; 10^{-12} sec nach Beginn der Wandverschiebung ist das Bremsfeld bei Eisen praktisch vollständig ausgebildet; bei elektromagnetischen Vorgängen mit einer Wellenlänge kleiner als etwa 50 cm wird das Bremsfeld theoretisch (und experimentell) merklich, bei hinreichend kurzen Wellen verhindert es das Auftreten von Ferromagnetismus vollständig. *Bechert (Gießen).*

Piesch, Hans: Über die Vereinfachung von allgemeinen Schaltungen. Arch. Elektrotechn. 33, 733—746 (1939).

Mit Verwendung mathematischer Formen für allgemeine Schaltungen, den sog. Zustandsfunktionen, ist es möglich, die Schaltungen dahin zu untersuchen, ob und welche Vereinfachungen vorgenommen werden können, ohne die Wirkung der Schaltung zu verändern. Unter diesen Vereinfachungen ist zwischen Kürzung, Zusammenlegung und Maschenbildung zu unterscheiden: In einer Kürzung werden mehrere parallel liegende Teilverbindungen durch einen Kurzschluß ersetzt, in einer Zusammenlegung mehrere Stromwege über eine gemeinsame Leitung geführt; ist dieser Vorgang von beiden Enden der Schaltung aus möglich, liegt eine Maschenbildung vor. *Autoreferat.*

Tsai, Chin-Tao: Short-cut methods for expanding the determinants involved in network problems. Chin. J. Phys. 3, 148—181 (1939).

Es werden Netzwerke (Schaltungen) ohne Gegeninduktivitäten und lineare Gleichungen, in denen die Knotenpunktsspannungen die Unbekannten und die elektromotorischen Kräfte in den Stromzweigen und die den Knotenpunkten von außen zugeführten Ströme die rechten Seiten bilden, behandelt. Für die auftretenden Determinanten werden kombinatorische Berechnungsweisen unter Benutzung der Bäume und geschlossenen Kreise des Netzwerkes sowie der Leitwerte der Zweige angegeben, ähnlich den von G. Kirchhoff, Pogg. Ann. 72, 497 (1847), Ph. Franklin, J. Math.

Physics, Mass. Inst. Technol. 4, 97—102 (1925) und W. Cauer, *Mit a. Genest Nachr.* 1938, 23 mit Verwendung der Widerstände der Zweige angegebenen Regeln. Cauer.

Keller, E. G.: *Beat theory of non-linear circuits.* J. Franklin Inst. 228, 319—337 (1939).

Verf. betrachtet die Wirkung einer elektrischen Vektorspannung in einem Kreis, der sich aus Selbstinduktion, Widerstand, Kapazität und einem zusätzlichen nichtlinearen Element zusammensetzt, wobei letzteres z. B. durch eine eisenhaltige Spule gegeben ist. Nach Aufstellung der Differentialgleichung für den gesamten magnetischen Fluß in der Eisenspule gibt Verf. eine Potenzreihenlösung der Differentialgleichung an. Hieraus berechnet er die verschiedenen Konstanten des Kreises und insbesondere die vollständige Lösung im Falle einer rein sinusförmigen Wechselspannung. Als nächsten Punkt berechnet Verf. die Eigenfrequenzen des betrachteten Kreises und berechnet die betreffenden Werte numerisch für verschiedene Kreisdämpfungen, welche durch die im Kreis enthaltenen Widerstandswerte bedingt werden. Endlich definiert Verf. einen linearen „Ersatzkreis“ für die betrachtete nichtlineare Anordnung und berechnet die wesentlichen Konstanten dieses Ersatzkreises. In einem praktischen Beispiel hat Verf. eine Reihe von Oszillogrammen aufgenommen, aus denen sich die verschiedenen Konstanten des Kreises errechnen lassen. Diese Experimentalwerte werden mit den theoretischen Werten verglichen, wobei sich eine genügende Übereinstimmung ergibt.

M. J. O. Strutt (Eindhoven).

Amerio, Luigi: *Il metodo della trasformazione di Laplace in un problema di propagazione dell'elettricità.* Ist. Lombardo, Rend., III. s. 72, 485—506 (1939).

Verf. erwähnt zunächst die Grundgleichungen für Ströme und Spannungen in einem Vierpol und in einer Kette von Vierpolen. Als Lösung dieser Gleichungen im Falle einer endlichen Anzahl von Vierpolen ergeben sich Ausdrücke für den Strom und für die Spannung des letzten Vierpols in Form von endlichen Reihen. Hierauf geht Verf. zu einer Leitung mit stetig verteilten Eigenschaften über und erwähnt die Formeln der operatorischen Rechenweise mittels Laplacescher Transformation, wobei die Ströme und Spannungen bei vorgegebenem Anfangszustand durch die ebenfalls vorgegebene Anregungsfunktion bestimmt werden. Diese Formeln wendet Verf. auf eine endliche Kette von Vierpolen an, die er als Modell einer pupinisierten Leitung betrachtet. Nachdem er Ströme und Spannungen in einer solchen endlichen Kette berechnet hat, geht er zu einer unendlichen Kette über und berechnet hierfür die Übertragungsfunktionen in Abhängigkeit der einzelnen Leitungskonstanten, wobei sich Ausdrücke in Form unendlicher Reihen ergeben.

M. J. O. Strutt (Eindhoven).

Borgnis, F.: *Die elektrische Grundschwingung zylindrischer Hohlräume.* (Laborat. d. Telefunken G. m. b. H., Berlin.) Hochfrequenztechn. 54, 121—128 (1939).

Verf. betrachtet metallische Hohlzylinder endlicher Länge, die beiderseits durch ebene parallele Flächen abgeschlossen werden und deren Inneres von einem homogenen Dielektrikum erfüllt ist. Den elektromagnetischen Schwingungszustand eines solchen Hohlraumes mit der tiefsten Eigenfrequenz nennt Verf. die Grundschwingung. Für diese Grundschwingung ergibt sich folgendes Bild: Die elektrische Feldstärke besitzt nur eine Komponente in der Richtung der Zylinderachse. Diese Komponente ist an der Innenoberfläche des Hohlraumes gleich Null (Randbedingung). Verf. löst die Differentialgleichung für die elektrische Feldstärke im Falle eines kreisförmigen Querschnittes (Besselsche Funktionen erster Art der Ordnung Null). Für diesen Fall berechnet Verf. die Dämpfung der genannten Eigenschwingung durch Integrieren der Wirbelstromverluste über die Gesamtinnenoberfläche des Hohlraumes. Analoge Berechnungen führt Verf. durch für den rechteckigen Querschnitt, während er für den elliptischen Querschnitt (Mathieusche Funktionen) nur die Grundfrequenz in Abhängigkeit der Querschnittsabmessungen angibt.

M. J. O. Strutt (Eindhoven).

Optik:

Platzeck, Ricardo, and E. Gaviola: *On the errors of testing and a new method for surveying optical surfaces and systems.* J. opt. Soc. Amer. 29, 484—500 (1939).

Die Verf. gehen davon aus, daß die Abweichungen eines parabolischen Spiegels nicht mehr als $\frac{1}{100} \lambda$, d. h. etwa $5,6 \cdot 10^{-7}$ cm betragen dürfen, also müsse auch das Prüfverfahren so genau sein. Das Foucaultsche Schneidenverfahren, wie es gewöhnlich ausgeführt werde, könne dies nicht leisten, da der Krümmungsmittelpunkt einer seitlichen Zone nicht in die Achse falle und man höchstens dadurch die Normalenrichtung feststellen könne, daß zwei Schatten Grenzen beim Durchgehen der Schneide zusammenfielen. Diese Beobachtung sei aber nicht mit hinreichender Genauigkeit auszuführen. Platzeck und Gaviola empfehlen, die Beobachtung

nicht in der Achse, sondern an den wirklichen Krümmungsmittelpunkten zu machen. Es sind dann freilich zwei Koordinaten zu messen, der Abstand vom Spiegel auf der Achse und der Abstand der Mittelpunkte von der Achse. Es wird aber durch eine mathematische Untersuchung gezeigt, daß die verlangte Genauigkeit auf diese Weise erreichbar ist, auf die andere Art nicht. Wenn der Spiegel annähernd gut ist, kann man auch den Achsenpunkt theoretisch bestimmen und nur die Abstände von der Achse messen. Es sind kleine Tafeln beigelegt und zwei Beispiele ausgeführt. Weiter wird bemerkt, daß man das Verfahren auch auf andere spiegelnde und brechende Flächen anwenden könne. Endlich werden ein paar Worte über die Prüfung eines Konvexspiegels gesagt.

Hans Boegehold (Jena).

Cittert, P. H. van: Kohärenz-Probleme. Physica, Haag 6, 1129—1138 (1939).

Es werden Ausdrücke angegeben für die Korrelation der Lichtschwingungen a) in zwei verschiedenen Punkten einer Ebene, die von einer ausgedehnten monochromatischen Lichtquelle beleuchtet ist, b) zu verschiedenen Zeiten im selben Punkt, der von einer punktförmigen, aber nicht ganz monochromatischen Lichtquelle bestrahlt wird. Die „Korrelation“ wird als wesensgleich mit dem von Zernike erörterten Begriff „Kohärenz“ aufgezeigt, und es werden Folgerungen für die Interferenzfähigkeit der bezogenen Lichtsorten bei optischer Abbildung gezogen.

Fues.

Guinier, André: La diffraction des rayons X aux très petits angles: Application à l'étude de phénomènes ultramicroscopiques. Ann. Phys., Paris 12, 161—237 (1939).

Es wird eine Anordnung beschrieben, die es erlaubt, sehr intensive Beugungsdiagramme mittels einer monochromatischen Strahlung zu erzielen. In einem theoretischen Teil wird zunächst für ein kleines Teilchen, das von einem monochromatischen Röntgenstrahlenbündel beleuchtet wird, die Intensität der in eine bestimmte Richtung gestreuten Strahlung berechnet, indem angenommen wird, daß das Teilchen aus p Atomen besteht, von denen jedes als Streuzentrum angesehen werden kann. Zur Berechnung der Summe der sich überlagernden elementaren Streuwellen wird eine Reihenentwicklung der Phase vorgenommen, die erkennen läßt, daß bei kleinem Streuwinkel die resultierende Streuintensität in erster Näherung durch eine e -Funktion darstellbar ist. Da die beobachtete Intensität das Mittel der Streuintensitäten einer großen Zahl von Teilchen ist, wird eine entsprechende Mittelwertbildung durchgeführt, die erkennen läßt, daß man aus der Intensitätsverteilung im Beugungsbild unter bestimmten Voraussetzungen näherungsweise Aussagen über die Größe der streuenden Teilchen und evtl. auch über ihre Form machen kann. Auch Aussagen über die Orientierung der Materieteilchen lassen sich aus dem Beugungsbild ableiten, falls es sich um Korngrößen von 0,1—0,01 Angströmeinheiten handelt. Der Verf. geht noch auf experimentelle Einzelheiten sowie auf einige mit der Problemstellung in Zusammenhang stehende theoretische Fragen ein, u. a. auf die Beugung durch ein zweidimensionales Gitter und auf die Beugung an Kristallen.

Picht (Potsdam-Babelsberg).

Kontorowich, M. J., and N. N. Lebedev: On a method of solution of some problems of the diffraction theory. J. Physics Acad. Sci. USSR 1, 229—241 (1939).

Die von den Verff. vorgeschlagene Methode besteht darin, daß man zu der gesuchten Funktion durch eine Laplacetransformation eine andere Funktion konstruiert, für die man aus der ursprünglichen Differentialgleichung eine gewöhnliche Differentialgleichung ableiten kann, die sich verhältnismäßig einfach lösen läßt, wobei noch die entsprechend zu ändernden Grenzbedingungen zu berücksichtigen sind. Aus der Lösung der durch Transformation gefundenen gewöhnlichen Differentialgleichung ergibt sich dann die Lösung des ursprünglichen Problems durch eine bestimmte Inversionsformel, die von den Verff. zunächst abgeleitet wird, und zwar in sehr allgemeiner Weise. Die zunächst allgemein entwickelte Methode wird dann auf das Beugungsproblem angewandt, wobei sich die Verff. auf das ebene Problem beschränken. Außerdem ist es hier erforderlich, vor Anwendung der Laplaceschen Integraltransformation auf die gesuchte Funktion $u(r, \theta)$ eine Hilfsfunktion $v(r, \theta)$ durch die Beziehung

$v = u - u(0)e^{-ikr}$ einzuführen und dann erst $\bar{v}(v) = \int_0^\infty v(r) \frac{H_v^{(2)}(kr)}{r} dr$ zu bilden, da

das entsprechende Integral mit $u(r)$ bei $u(0) \neq 0$ nicht existiert. Für \bar{v} ergibt sich

die gewöhnliche Differentialgleichung $\frac{d^2 \bar{v}}{d\theta^2} + \nu^2 \bar{v} = \frac{2u(0)\nu e^{i\frac{\pi}{2}}}{i \sin \nu \pi}$, deren Lösung lautet:

$\bar{v} = A \cos \nu \theta + B \sin \nu \theta + \frac{2u(0)e^{i\frac{\pi}{2}}}{i \nu \sin \nu \pi}$, wo A und B von θ unabhängige Konstanten sind, die gleichfalls angebar sind. Sie ergeben sich aus den Grenzbedingungen für ν bzw. \bar{v} . Mit Hilfe der oben erwähnten Inversionsformel ergibt sich aus \bar{v} sofort v . — Im letzten Abschnitt berechnen die Verff. nach dieser Methode die Beugung einer ebenen elektromagnetischen Welle an einer vollkommen reflektierenden dünnen Platte, die unter einem bestimmten Winkel gegen die Richtung der einfallenden Welle geneigt ist. Sie zeigen, daß das von ihnen erhaltene Resultat mit der Sommerfeldschen Lösung dieses Problems identisch ist. *Picht* (Potsdam-Babelsberg).

Sexl, Th., und P. Urban: Bemerkung zur klassischen Beugungstheorie. *Z. Physik* 114, 92—97 (1939).

Anomale Beugungseffekte irgendeines Wellenvorgangs finden sich immer für Frequenzen, die den Eigenfrequenzen des beugenden Körpers entsprechen. Dies gilt jedoch nur genähert, wenn der Körper nicht völlig abgeschlossen, seine Eigenschwingungen also gedämpft, die Eigenfrequenzen komplex sind. Dann sind nicht bloß die letzteren durch die Dämpfung etwas verstimmt, sondern sie fallen auch nicht mehr genau zusammen mit den Resonanzstellen der ungedämpften erzwungenen Schwingungen. Unter diesem Gesichtspunkt haben die Verff. ältere Ergebnisse von Schaefer und Mitarbeitern über Beugung elektromagnetischer Wellen an dielektrischen Zylindern nochmals kurz zusammengefaßt und gezeigt, daß und warum in den dort angeführten Beispielen der Unterschied vernachlässigbar klein ist. *Fues*.

Kharkevich, A.: On the correction of distortions due to an optical slit. *J. techn. Physics, Leningrad* 9, 1014—1023 (1939) [Russisch].

Becker, H. E. R.: Die Analyse von Niederfrequenz durch Lichtbeugung an Kapillarwellen. *Ann. Physik, V. F.* 36, 585—608 (1939).

Die zu analysierende Niederfrequenz, ein Gemisch aus n sich überlagernden Teilwellen verschiedener Amplitude, wird durch einen Stift, der in eine Schale mit Quecksilber eintaucht und magnetisch in Schwingungen versetzt werden kann, auf die Quecksilberoberfläche übertragen, wo sich entsprechend frequente, stark gedämpfte Oberflächenwellen ausbreiten, an denen eine schräg auftreffende ebene Lichtwelle reflektiert und — da die Oberflächenwellen als Gitter wirken — gebeugt wird. Es treten, den verschiedenen im Frequenzgemisch enthaltenen Frequenzen entsprechend, n Beugungsbilder erster sowie höherer Ordnung auf. Der Verf. behandelt — neben den experimentellen Einzelheiten der Analysiermethode — die Theorie der Erscheinungen, indem er nach Angabe des zugehörigen Fraunhoferschen Beugungsintegrals das Produkt aus der dem Frequenzgemisch entsprechenden Amplitude der Oberflächenwelle und der Größe $\frac{2\pi}{\lambda} \cos \varphi$, wo λ die Lichtwellenlänge und φ der Einfallswinkel der ebenen Licht-

welle ist, als sehr klein voraussetzt und im Integranden eine Reihenentwicklung nach einer mit diesem Produkt in unmittelbarem Zusammenhang stehenden Größe ξ vornimmt. Durch Vernachlässigung höherer Potenzen von ξ erhält der Verf. Ausdrücke für die Intensität der ersten Ordnung des Beugungsbildes. Er untersucht weiter den allgemeinen Intensitätsverlauf der Fraunhoferschen Beugung an einer gedämpften fortschreitenden Kapillarwelle sowie einige Eigenschaften der als Kapillarwellen anzusprechenden Oberflächenwellen. Endlich untersucht der Verf. noch theoretisch das Auflösungsvermögen der Analysiermethode und die erforderliche Dauer der zu analysierenden Töne, die bei 1000 Hz etwa 0,03 sec beträgt, bei einer Breite der benutzten Lichtwelle von 3 cm. *Picht* (Potsdam-Babelsberg).

Fues, E.: Die Ausbreitungsfläche skalarer Wellen im gitterartigen Medium. *Ann. Physik, V. F.* 36, 209—226 (1939).

Der Verf. versucht eine geometrische Veranschaulichung der Ergebnisse der dynamischen Theorie der Gitterbeugung, indem er sie qualitativ in das Modell einer „Ausbreitungsfläche“ zusammenfaßt. Er behandelt zunächst die Konstruktion der Ausbreitungsfläche im Gitter, wobei zu beachten ist, daß eine einzelne ebene Welle im Gitter nicht existenzfähig ist, da sich aus ihr unendlich viele Beugungswellen bilden, die in ihrer Gesamtheit ein dynamisch abgeschlossenes „Wellenfeld“ bilden. Die Intensität der einzelnen Teilnehmer dieses Wellenfeldes wird indessen im allgemeinen sehr verschieden sein, insbesondere wird bei schwacher Gitterstruktur nur eine der das

Wellenfeld bildenden Wellen als stark anzusprechen sein. Variiert man deren Richtung, so ändern sich natürlich auch die Richtungen der zugehörigen, das Wellenfeld bildenden Wellen, und man erhält — bei vektorieller Darstellung der verschiedenen Wellen — als Ort der Vektorspitzen eine unendlich vielschalige, mit dem reziproken Gitter periodische Ausbreitungsfläche, die vom Verf. näher diskutiert wird. Insbesondere wird auf die Deformation in der Umgebung der Durchdringungsstellen der Ausbreitungsflächen eingegangen. — Entsprechend behandelt der Verf. den Fall, daß aus dem äußeren, nicht gitterartigen Medium eine ebene Welle auf das Gitter fällt, der im Innern des Gitters zwei Strahlen entsprechen. Hierbei wird der Laue- und Braggfall besonders behandelt. — Zum Schluß geht der Verf. auf die bei der Beugung schneller Elektronen vorliegenden besonderen Verhältnisse ein. *Picht* (Potsdam-Babelsberg).

Harvey, G. G.: On the total scattering of X-rays from crystals. (*Eastman Laborat., Massachusetts Inst. of Technol., Cambridge, Mass.*) Phys. Rev., II. s. 56, 242—247 (1939).

Kurze, klassische Herleitung einer umfassenden wellenkinematischen Streuformel für die von einem Gitter selektiv und diffus abgelenkte Intensität. Kristallform-, Struktur-, Temperatur- und Atomfaktoren sondern sich zwanglos und unter sehr allgemeinen Voraussetzungen. Z. B. werden weder kugelsymmetrische Atome noch Isotropie der Temperaturbewegung vorausgesetzt, merkwürdigerweise aber eine spezielle (parallelepipedische) Kristallform zugrundegelegt. Frequenzändernde Streuvorgänge und Absorptionen werden vernachlässigt, dementsprechend die Atom- und Elektronenbewegung durch stationäre räumliche Verteilungsfunktionen ersetzt. Trotzdem werden zwei Terme der resultierenden Intensität als Comptonstreuung gedeutet und an ihnen dem Pauliprinzip zulieb eine quantenmechanische Korrektur angebracht.

Fues.

Lamla, Ernst: Zur Frage der Umweganregung bei Röntgenstrahlinterferenzen. Ann. Physik, V. F. 36, 194—208 (1939).

Der Verf. behandelt nach bekannten Methoden der dynamischen Gitterbeugungstheorie das gleichzeitige Entstehen zweier „starker“ Interferenzstrahlen aus dem eingedrungenen Primärstrahl in einer Kristallplatte. Es gelingt ihm, die zugehörige Dispersionsgleichung, die bei nicht komplanaren Strahlen vom 12. Grad wird, in eine in den drei Strahlen symmetrische Form zu bringen, welche bei Komplanarität die Aufspaltung in zwei Probleme 6. Grads erkennen läßt. Unter der Voraussetzung, daß eine Streuamplitude verschwindet, wird für allgemeine Strahlrichtungen eine Abschätzung der Größenordnung der Amplituden vorgenommen. Für den Fall der Komplanarität wird die Breite des Totalreflexionsbereichs in beispielhaften Figuren dargestellt. Sie lassen die Entwicklung der „Umweganregung“ einer Interferenz bei allmählicher Mitwirkung einer zweiten reflektierenden Netzebene deutlich erkennen.

Fues.

Relativitätstheorie:

March, A., und E. Foradori: Ganzzahligkeit in Raum und Zeit. II. Z. Physik 114, 653—666 (1939).

Definition von Geschwindigkeit und Beschleunigung eines Teilchens mit der in I. [Z. Physik 114, 215 (1939); dies. Zbl. 22, 43] entwickelten Metrik. Die Anwendung auf den linearen Oszillator zeigt, daß Schwingungen nicht beobachtbar sein sollten, deren Schwingungsdauer unterhalb der elementaren Zeit $t_0 = l_0/c$ liegt. Die Verff. geben eine Begründung dafür, daß ihre Metrik trotz der angenommenen Invarianz von l_0 mit der Relativitätstheorie verträglich sei.

Bechert (Gießen).

Oppenheimer, J. R., and H. Snyder: On continued gravitational contraction. Phys. Rev., II. s. 56, 455—459 (1939).

Der Zusammenbruch eines Sternes großer Masse, dessen Strahlungsquellen erschöpft sind, wird auf Grund der Feldgleichungen der Allg. Rel.-Theorie verfolgt.

Teil I schildert mittels Abschätzungen die asymptotische Annäherung an den Gravitationsradius, Teil II verfolgt das Problem unter Vernachlässigung des Druckes in Einzelheiten.

Heckmann (Göttingen).

Moghe, D. N.: A note on prof. N. R. Sen's paper. Bull. Calcutta Math. Soc. **31**, 19—21 (1939).

Betrachtungen über die Bewegung eines Teilchens im leeren Raum in der Nähe von Materie, gemäß der allgemeinen Relativitätstheorie; zugleich Kritik einer Arbeit von N. R. Sen (dies. Zbl. 18, 286), in der die Wirkung der kosmologischen Konstanten λ als Korrektur in die λ -freien Feldgleichungen der allgemeinen Relativitätstheorie eingeführt wird.

Bechert (Gießen).

Sen, N. R.: On Mr. Moghe's note. Bull. Calcutta Math. Soc. **31**, 23 (1939).

Erwiderung auf die Kritik von D. N. Moghe (s. vorsteh. Ref.) *Bechert* (Gießen).

Chou, P. Y.: On the foundations of Friedmann universe. Chin. J. Phys. **3**, 76—84 (1939).

Chou, P. Y.: Note on spherical symmetry of space and the foundations of Friedmann universe. Chin. J. Phys. **3**, 85—88 (1939).

Die erste Arbeit gibt eine teilweise neue Begründung der Friedmannschen Metrik. Die zweite ändert ein Postulat der ersten ab.

Heckmann (Göttingen).

Whitrow, G. J.: On the Lobatschewskian trigonometry of a static substratum. Quart. J. Math. Oxford Ser. **10**, 313—319 (1939).

Atomphysik.

Statistik und kinetische Theorie der Materie:

Lévy, Paul: Mouvement brownien linéaire et mouvement brownien plan. C. R. Acad. Sci., Paris **209**, 140—142 (1939).

Soit $X(t)$ la fonction aléatoire de la variable positive t , à accroissements indépendants, ayant pour fonction caractéristique [= la valeur moyenne de e^{izx} , z étant constant et

x la valeur de $X(t)$] $e^{-t\frac{z^2}{2}}$. Le processus ainsi défini est celui du mouvement brownien linéaire. Soit $Y(t)$ le maximum de $X(t')$ pour $t' \leq t$, et $T(y)$ la fonction inverse de $Y(t)$. Si l'on sait qu'une valeur donnée de t est telle que $X(t) = Y(t)$, la probabilité des grandes valeurs de $X(t)$ est augmentée par ce renseignement; on a alors

$Pr \{X(t) > x | t\} = e^{-\frac{x^2}{2t}}$, $x > 0$. — L'auteur indique sans démonstration quelques propriétés de $X(t)$ et de $T(y)$. Il considère ensuite le mouvement brownien plan obtenu en associant à $X(t)$ une fonction $X_1(t)$, indépendante de $X(t)$. Le point $M(t)$ de coordonnées X et X_1 est animé de ce mouvement brownien. L'aire limitée par l'axe décrit par $M(t')$ pour $0 \leq t' \leq t$ et sa corde a une mesure $A(t)$. Le fonction $A(t)$ vérifie l'équation différentielle stochastique

$$\Delta A(t) = \frac{1}{2} R \eta \sqrt{\Delta t} + A_1(t, \Delta t)$$

où $R^2 = X^2 + X_1^2$; η est une variable gaussienne réduite, indépendante de R et de $A(t)$; $A_1(t, \Delta t)$ dépend, pour chaque t , de la même loi que $A(\Delta t)$; sa valeur probable est nulle.

B. Hostinsky (Brünn).

Ornstein, L. S., and J. M. W. Milatz: Accidental deviations in the conduction of heat. Physica, Haag **6**, 1139—1145 (1939).

Verff. berechnen 1. den Wärmeübergang zwischen zwei Körpern von den Temperaturen T_1 und T_2 unter Berücksichtigung der zufälligen Wärmeschwankungen. Ist α der Koeffizient des Wärmeüberganges, c_1 und c_2 die spez. Wärme des ersten bzw.

des zweiten Körpers und setzt man $\frac{1}{c} = \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2}$ und $\theta = T_2 - T_1$, so finden die

Verff.: $\bar{\theta}^2 = \bar{\theta}^2 + \frac{ck}{2} \left(1 - e^{-\frac{2\alpha t}{c}}\right) (T_1^2 + T_2^2)$ (k Boltzmannsche Konstante). 2. wird

die Wärmeleitung längs eines Stabes berechnet, welcher an den beiden Enden die gleiche Temperatur T_0 besitzt. Wenn man mit x die Koordinate längs des Stabes bezeichnet

und unter c die spez. Wärme versteht, so gilt $(T(x) - T_0)^2 = \frac{3}{2} \frac{k}{c\pi^3} T_0^3 \{\pi^2 - (2x - \pi)^2\}$.

(Der Buchstabe k kommt auf S. 1143 in drei verschiedenen Bedeutungen vor: einmal als ganze Zahl und Summationsindex, als Wärmeleitfähigkeit und schließlich wie hier als Boltzmannsche Konstante.) Nimmt man als Randbedingung den Fall, daß der Wärmestrom an den Grenzen verschwindet, und ist T_0 die Temperatur des stationären Endzustandes, so ergibt sich: $(T - T_0)^2 = 3k/2\pi^3 c T_0^3 (\pi^2/3 + (2x - \pi)^2)$. Schließlich wird 3. das mittlere Schwankungsquadrat der Temperaturverteilung bei beliebigen Grenzbedingungen berechnet. Ist $\varphi(x, t) = T(x, t)$ die Temperaturverteilung, wie sie sich ohne Berücksichtigung der zufälligen Schwankungen auf Grund der gewöhnlichen

Wärmeleitungsgleichung ergibt, so findet man $\overline{(T(x, t) - \bar{T}(x, t))^2} = 4k/c\pi \int_0^\pi \bar{T}^2(x, t) dx$.

Die Wärmeleitungsgleichung gilt nur „im Mittel“ und muß im allgemeinen Fall durch ein Glied ergänzt werden, das wie — in der Langevinschen Behandlung der Brownschen Bewegung — die zufälligen Einflüsse erfaßt. (Die Arbeit ist durch viele Druckfehler entstellt.)

Glaser (Prag).

Kristallbau und fester Körper:

Frenkel, J., and T. Kontorova: On the theory of plastic deformation and twinning. J. Physics Acad. Sci. USSR 1, 137—149 (1939).

Um den Mechanismus des Gleitvorgangs zu verstehen, wird zunächst ein eindimensionales Modell behandelt. Es besteht aus einem linearen Gitter von elastisch aneinander gebundenen Atomen, die sich in einem zusätzlichen sinusförmigen Kraftfeld mit der Periode des linearen Gitters bewegen. Dieses Kraftfeld soll die Wechselwirkung mit einer benachbarten Kette von festgehaltenen Atomen darstellen. Es ergeben sich zwei Typen von Wellenbewegung, 1. eine Welle, bei der die einzelnen Atome kleine Schwingungen um Gleichgewichtslagen ausführen, 2. eine Welle, bei der die Atome von einer Gleichgewichtslage in die nächste, die ursprünglich vom benachbarten Atom besetzt war, wandern. Die letztere, als Gleitwelle bezeichnet, kann nur oberhalb einer kritischen Mindestenergie auftreten und wandert mit einer Geschwindigkeit, die sich mit wachsender Energie der Schallgeschwindigkeit nähert. Läßt man Schwingungen der zuerst festgehaltenen Atome in der benachbarten Atomkette um feste Gleichgewichtslagen zu, so wird die Energie der Gleitwelle nach und nach vernichtet, am schnellsten für kleine Energien der Gleitwelle. Die am eindimensionalen Modell durchgeführten Überlegungen werden auf den dreidimensionalen Fall verallgemeinert und führen zu einer Theorie der plastischen Deformation und der Zwillingsbildung von Kristallen.

J. Meixner (Berlin).

Elektronentheorie:

Pekar, S.: Distribution of electron velocities in the discharge plasma. Ž. eksper. teoret. Fiz. 9, 1015—1025 (1939) [Russisch].

Weizel, W., und W. Olmesdahl: Einige Experimente zur Theorie der Glimmentladung. Z. Physik 114, 719—733 (1939).

Ergebnis: Ein negatives Glimmlicht entsteht in einer Entladung, wenn ein Bündel schneller Elektronen im feldfreien Gebiet vorhanden ist; das Glimmlicht entsteht auch dann, wenn es nicht durch Trägersaustausch mit der übrigen Entladung zusammenhängt. Das Potential des Glimmlichtes ist durch die umgebenden Wände bestimmt, und zwar ist es etwas positiver als die Wand, welche die Rolle der Anode hat. Durch eine negative Elektrode im Glimmlicht kann man nur ein kleines Gebiet in ihrer Nähe beeinflussen, es entsteht dabei ein Dunkelraum an der Elektrode; im Glimmlicht selbst wird dadurch kein Feld erzeugt. Diese Resultate stimmen mit der Theorie überein.

Bechert (Gießen).

Rebsch, R.: Die Bedeutung der Dreierstöße für den Energiehaushalt der Gasentladungen. Z. Physik 114, 620—635 (1939).

Im Energiehaushalt des negativen Glimmlichtes ist noch ungeklärt, wie die aus dem Fallraum kommenden schnellen Elektronen im Glimmlicht ihre Energie abgeben; Ionisierung

und Anregung ist dort häufig, wie man am Leuchten des Glimmlichtes sieht, und zwar ist sie etwa 10mal häufiger als beim Stoß von Elektronen auf Moleküle zu erwarten wäre. Energieübertragung von schnellen Elektronen auf die langsamen des Plasmas durch einfachen Stoß kommt für die Erklärung auch nicht in Frage, weil ein Elektron von 1000 V auf 1 cm Weg an langsame Elektronen nur etwa den 10^4 -ten Teil dessen an Energie verliert, was es gemäß diesem Erklärungsversuch an Energie verlieren müßte. Verf. untersucht die Energieübertragung von schnellen Elektronen auf langsame durch Dreierstöße: Der Stoß des schnellen Elektrons gegen das langsame soll in der Nähe eines Gasmoleküls erfolgen, dabei nimmt das Molekül Impuls auf, und es wäre denkbar, daß dabei die Stöße mit großer Energieabgabe bevorzugt würden. Das Molekül wird als Ladungswolke schematisiert, die beiden Elektronen in nullter Näherung als frei behandelt, die Wechselwirkung der beiden untereinander und mit dem Molekül als Störung aufgefaßt. Berechnung der Wellenfunktion bis zur zweiten Näherung einschließlich gibt in den einzelnen Gliedern: 1. Rutherfordstreuung der beiden Elektronen aneinander ohne Beteiligung des Moleküls, 2. Streuung je eines der zwei Elektronen am Molekül ohne Beteiligung des andern, 3. Streuung beider Elektronen am Molekül ohne gegenseitige Beeinflussung; diese drei Glieder geben gegenüber der klassischen Berechnung der Streuung nichts Neues. Dazu kommt noch 4. Streuung eines Elektrons am Molekül mit nachfolgender Streuung am zweiten Elektron (und derselbe Prozeß in umgekehrter zeitlicher Reihenfolge) und 5. Stöße, bei denen die drei Teilchen im Sinn der Unschärferelation merklich gleichzeitig zusammenstoßen. Die Prozesse 5. sind gegenüber den Prozessen 4. zu vernachlässigen; die letzteren aber entsprechen genau der zweimaligen klassischen Streuung und geben daher einen viel zu geringen Energieverlust beim Stoß. Durch Dreierstöße wird der Energiehaushalt im Glimmlicht also auch nicht in Ordnung gebracht.

Bechert (Gießen).

Nicht-relativistische Quantentheorie:

Shaffer, Wave H., Harald H. Nielsen and L. H. Thomas: The rotation-vibration energies of tetrahedrally symmetric pentatomic molecules. I. (*Mendenhall Laborat. of Physics, Ohio State Univ., Columbus, Ohio.*) Phys. Rev., II. s. 56, 895—907 (1939).

Für einige Schwingungen einer Molekel vom Methantyp werden die Schwingungsrotationsterme, Auswahl- und Intensitätsregeln ausgerechnet. Die Art der Näherung ist die früher bei Molekeln vom Wassertyp (dies. Zbl. 22, 40) benutzte und berücksichtigt neben den „Coriolis-Kopplungen“ (H. A. Jahn, dies. Zbl. 19, 428; 20, 326; 21, 268) noch weitere Kopplungsglieder gleicher Größenordnung.

F. Hund (Leipzig).

Duchesne, Jules, et W. G. Penney: Structure de la molécule de benzène. Bull. Soc. Roy. Sci. Liège 8, 514—530 (1939).

Mit den gemessenen aktiven Schwingungsgrundfrequenzen des Benzols werden die Parameter eines von Manneback gegebenen Ansatzes für die potentielle Energie bestimmt. Daraus werden die entsprechenden Schwingungsfrequenzen des schweren Benzols C_6D_6 und die Frequenzen einiger inaktiver Schwingungen ausgerechnet. Zur Berechnung der nicht ebenen inaktiven Schwingungen ist der Potentialansatz zu allgemein; es wird daher eine der valenzmäßigen Deutung entsprechende Verringerung der Parameterzahl vorgenommen.

F. Hund (Leipzig).

Bernard, E., C. Manneback et A. Verleysen: Fonction potentielle des mouvements plans de la molécule de benzène. Calcul des fréquences normales planes de vibration des molécules sym- $C_6H_3D_3$, para- $C_6H_4D_2$ et para- $C_6H_2D_4$. Ann. Soc. Sci. Bruxelles, Sér. I 59, 376—402 (1939).

Die Arbeit beschäftigt sich mit den 21 Eigenschwingungen des Benzolmoleküls, die in der Ebene des Sechseringes erfolgen. Die potentielle Energie wird als quadratischer Ausdruck in den Normalkoordinaten angesetzt, und zwar ohne Kopplungsglieder zwischen den verschiedenen Eigenschwingungen. Die auftretenden Koeffizienten werden aus den beobachteten Raman- und infraroten Absorptionsfrequenzen des C_6H_6 und des C_6D_6 bestimmt. Für die optisch inaktiven Schwingungen von C_6H_6 und C_6D_6 müssen Beobachtungen an anderen Molekülen $C_6H_xD_y$ ($x + y = 6$) herangezogen werden.

Maue (München).

Blokhinzev, D.: The spectra of fluorescence and absorption of complex molecules. J. Physics Acad. Sci. USSR 1, 117—124 (1939).

Berechnung des Absorptions- und des Emissionskoeffizienten für ein Molekülgas mit den Methoden der Strahlungstheorie. Zunächst wird die Annahme gemacht, daß die Moleküle im

Grundzustand und im angeregten Zustand sich im thermischen Gleichgewicht befinden. Zusammenhang zwischen Absorptions- und Fluoreszenzspektrum. Untersuchung des Falles, daß im angeregten Zustand nicht Gleichgewicht herrscht, daß die Anregung vielmehr durch eine ebene monochromatische Welle bewirkt wird. *Bechert* (Gießen).

Fursov, V., and A. Vlassov: The breadth of spectral lines at large densities of a homogeneous gas. *J. Physics, Moscow* 1, 335—340 (1939).

Berechnung der Breite des Resonanzniveaus in einem sehr dichten Gas. Schematisierung: Die Atome sollen nur zwei Zustände haben, den Grundzustand und das Resonanzniveau; für $t = 0$ sei nur ein Atom angeregt, die anderen im Grundzustand; als Wechselwirkung U wird die Dipolwirkung von je zwei Atomen aufeinander angesetzt und U als zeitunabhängig angenommen. Die letzte Annahme entspricht hoher Dichte: Die Atome bleiben während der Energieübertragung praktisch auf ihren Plätzen. Mit diesen Annahmen wird Lebensdauer und Breite des Resonanzniveaus näherungsweise berechnet. *Bechert* (Gießen).

Jauncey, G. E. M.: Theory of the diffuse scattering of X-rays by crystals in the region of the K critical absorption wave-length. *Phys. Rev., II. s.* 56, 644—651 (1939).

Die Abhandlung gehört in die Reihe derjenigen Arbeiten, welche die exakten, aber schwerfälligen Ergebnisse der quantenmechanischen Dispersionstheorie in eine handliche klassische Form zu bringen suchen. Demgemäß wird die klassische elektronentheoretische Streustrahlung eines Atoms mit Z Elektronen, die nach einer stationären Verteilungsfunktion im Atombereich verteilt sind, erst berechnet und dann (nach Ideen von Raman u. a.) in einen „kohärenten“ und einen „inkohärenten“ Anteil zerlegt. Die weder klassische noch quantenmechanische „Begründung“ solcher Zerlegungen ist wohl kaum stichhaltig, vielmehr ruht ihre Bedeutung ausschließlich auf dem praktischen Erfolg. Die Betrachtung wird ergänzt durch die Annahme einer spektralen Verteilung virtueller Oszillatoren (nach dem Vorgang von Kramers, Kallmann und Mark), aus der sich ein Atomfaktordefekt berechnet. Dieser wird mit Hönl's quantentheoretischen Formeln und mit McNatts Experimenten verglichen. Als Ergebnis der Streurechnungen werden schließlich geschlossene Ausdrücke für die kohärente und die inkohärente Streuamplitude eines Atoms angegeben. Ein in der letzteren auftretendes Korrekturglied, das für Strahlung wesentlich wird, die härter ist als die Kantenfrequenz des Streuers, wird als klassisches Analogon der Fluoreszenzstrahlung gedeutet. *Fues*.

Shockley, W.: The quantum physics of solids. I. The energies of electrons in crystals. *Bell Syst. techn. J.* 18, 645—723 (1939).

Diskussion verschiedener Eigenschaften der Kristalle (Bindungsenergie der Metallgitter, der Ionengitter, der Gitter mit homöopolarer oder Valenzbindung, spezifische Wärme der Metallelektronen, Para- und Ferromagnetismus der Metalle) auf Grund der Vorstellung der für die Elektronen im Kristall erlaubten Energiebänder.

J. Meixner (Berlin).

Kompaneetz, A.: On the viscosity of the electron liquid in metals. *Ž. eksper teoret. Fiz.* 9, 920—926 (1939) [Russisch].

MacColl, L. A.: Numerical calculations of the reflection of electrons by metals. *Phys. Rev., II. s.* 56, 699—702 (1939).

Es wird der Reflexionskoeffizient für einen auf ein Metall auffallenden Elektronenstrahl in Abhängigkeit von der Energie der Elektronen und der Austrittsarbeit des Metalls wellenmechanisch berechnet. Die potentielle Energie der Elektronen wird dabei im Metallinnern als konstant angesehen; die Wellenfunktion ist also im Innern eine ebene Welle. Außerhalb des Metalls stehen die Elektronen unter dem Einfluß der Bildkraft; hier läßt sich die Wellenfunktion unter Benutzung konfluenter hypergeometrischer Funktionen darstellen. *Maue* (München).

Davydov, B.: On the contact resistance of semi-conductors. *J. Physics Acad. Sci. USSR* 1, 167—174 (1939).

Der Kontaktwiderstand zwischen einem Metall und einem Halbleiter wird elek-

tronentheoretisch behandelt. An der Kontaktstelle bildet sich im Halbleiter eine Raumladungsschicht aus, deren Dicke durch das Diffusionsgleichgewicht bestimmt ist. Die Raumladung ihrerseits ist für die elektrische Feldverteilung, den fließenden Strom und den Übergangswiderstand zwischen Metall und Halbleiter maßgebend.

Maue (München).

Riehl, N., und M. Schön: Der Leuchtmechanismus von Kristallphosphoren. *Z. Physik* **114**, 682—704 (1939).

Kristallphosphore sind Phosphore, bei denen am Leuchtmechanismus nicht nur einzelne Atome oder Moleküle beteiligt sind, sondern der Kristall als Ganzes wirksam ist. Für diese Leuchtstoffe wird das folgende Modell angegeben, das das reichhaltige experimentelle Tatsachenmaterial über diese Stoffe qualitativ vollständig erklärt. Im Energiespektrum der Kristallelektronen befinden sich zwischen dem obersten besetzten und dem untersten unbesetzten Band („Leitfähigkeitsband“) zwei Arten diskreter Terme: 1. „Störterme“ dicht oberhalb des besetzten Bandes, herrührend von Fremdatomen, die sich zwischen den Gitteratomen befinden und 2. „Anlagerungsterme“ dicht unterhalb des Leitfähigkeitsbandes. Erstere sind im unerregten Phosphor besetzt, letztere unbesetzt. Bei der Einstrahlung von Licht werden Elektronen des besetzten in das unbesetzte Band gehoben. Die dabei entstehenden Löcher im unteren Band werden durch Elektronen aus den Störtermen ausgefüllt. Die Lumineszenz rührt schließlich von Übergängen aus dem Leitfähigkeitsband in die nunmehr leer gewordenen Störterme her.

Maue (München).

Mösch, G.: Thermospannung am Element Metall-Halbleiter-Metall. IV. Besprechung experimenteller und theoretischer Ergebnisse für Kupferoxydul. *Ann. Physik*, **V. F. 34**, 265—279 (1939).

Im Anschluß an frühere Arbeiten des Verf. wird die Thermospannung eines Elementes Metall-Halbleiter-Metall nach der Elektronentheorie der Metalle berechnet. Die gewonnene Formel für die Thermokraft enthält die Elektronendichte im Halbleiter als unbekannte Temperaturfunktion. Eine experimentelle Prüfung des Ergebnisses, die befriedigend ausfällt, erfolgt durch Vergleich der Temperaturabhängigkeit von Thermokraft und Leitfähigkeit des Halbleiters. Hierzu werden Messungen von Vogt und Schweickert an Cu_2O herangezogen.

Maue (München).

Squire, Charles F.: Antiferromagnetism in some manganous compounds. *Phys. Rev.*, **II. s. 56**, 922—925 (1939).

Welker, Heinrich: Supraleitung und magnetische Austauschwechselwirkung. *Z. Physik* **114**, 525—551 (1939).

Wie Verf. in einer früheren Arbeit gezeigt hat, läßt sich der vollständige Diamagnetismus des Supraleiters (und damit die Supraleitfähigkeit selbst) verstehen, wenn man annimmt, daß der Grundzustand des Systems der Metallelektronen durch eine Lücke im Energiespektrum vom nächsthöheren Zustand getrennt ist. Die Breite A der Lücke hängt mit der Sprungtemperatur T_c der Supraleitung durch die größenordnungsmäßig geltende Beziehung $A \sim k T_c$ (k = Boltzmannsche Konstante) zusammen. In der vorliegenden Arbeit wird eine elektronentheoretische Begründung für das Auftreten der Lücke gegeben. Die übliche Vorstellung des Elektronengases wird ersetzt durch die der Elektronenflüssigkeit, in der die Elektronen wegen der Coulombschen Abstoßung sich nicht beliebig nahe kommen, sondern einen mittleren Abstand voneinander einhalten. Es besteht also bezüglich der räumlichen Verteilung der Elektronen eine gewisse Ordnung, die zu der regelmäßigen Anordnung der Atome in einem Kristallgitter in Analogie gesetzt werden kann. Zu dieser „Gitterstruktur“ der Elektronen kommt hinzu ein neues Ordnungselement, das die Bewegung der Elektronen betrifft und zu einer im Kristall einer Legierung vorhandenen Überstruktur in Analogie gesetzt werden kann. Infolge der magnetischen Austauschwechselwirkung bewegen sich nämlich benachbarte Elektronen (gleichen Spins) in entgegengesetzter Richtung. Die oben erwähnte kritische Energie A ist die zur Umkehr der Bewegungsrichtung eines Elektrons infolge der Geschwindigkeitsüberstruktur erforderliche Energie. *Maue.*

Koyenuma, N.: Biologische Treffertheorie und Mutationserzeugung. Z. Physik 114, 669—671 (1939).

Neugebauer, Th.: Zur Frage der Selbstverdoppelung der Virusmoleküle. Z. Physik 114, 667—668 (1939).

Relativistische Quantentheorie:

Hoisington, L. E., S. S. Share and G. Breit: Effects of shape of potential energy wells detectable by experiments on proton-proton scattering. Phys. Rev., II. s. 56, 884—890 (1939).

Diskussion verschiedener Formen des Potentialloches der Wechselwirkung zwischen Protonen an Hand der Experimente über Proton-Protonstreuung. Die beste Übereinstimmung mit den Streuversuchen gibt das Mesonenpotential; die Masse des Mesons errechnet sich daraus aber zu 326 Elektronenmassen, das ist doppelt zu groß.

Bechert (Gießen).

Creutz, E.: Analysis of proton-proton scattering data. Phys. Rev., II. s. 56, 893—894 (1939).

Frenkel, J., and V. Cherdyn'tzev: On a gaseous model of the atomic nucleus. Ž. eksper. teoret. Fiz. 9, 899—914 (1939) [Russisch].

Jensen, H.: Quantitative und modellmäßige Daten zur Isotopensystematik. Naturwiss. 27, 841—850 (1939).

Astrophysik.

Biermann, L., und T. G. Cowling: Chemische Zusammensetzung und dynamische Stabilität der Sterne. II. Z. Astrophys. 19, 1—10 (1939).

Verff. berufen sich auf die Resultate über die dynamische Stabilität der Sterne in ihrer Abhängigkeit von der chemischen Zusammensetzung, welche in einer vorgehenden Arbeit (vgl. dies. Zbl. 18, 431) abgeleitet wurden. Als Kriterium für die dynamische Stabilität wurde die Bedingung angenommen, daß die Gesamtenergie des Sternes negativ sein soll. Als Stabilitätskriterium ist dies zwar nur eine Näherung, denn die exakte Form der Bedingung lautet, daß bei infinitesimaler adiabatischer Zustandsänderung des Sternes seine Energie anwachsen muß. In der vorliegenden Arbeit wird von genaueren Approximationen Gebrauch gemacht und es wird gefunden, daß innerhalb eines gewissen Bereichs ein Stern auch bei positiver Gesamtenergie noch stabil sein kann. Zu dem zu untersuchenden Stern wird eine homologe Schar von Sternmodellen konstruiert und der Verlauf der Gesamtenergie E in Abhängigkeit vom Radius R untersucht mit Hilfe des Kriteriums $\partial E / \partial R \geq 0$, man erhält so die Abhängigkeit der dynamischen Stabilität von der chemischen Zusammensetzung und von R . Verff. zeigen, daß oberhalb eines gewissen Radius von der Ordnung 30—100 R_{\odot} (je nach der Größe der Masse), die dynamische Stabilität einen gewissen Wasserstoffgehalt erfordert. Das Resultat ist bemerkenswert, da es gerade solche Sterne betrifft, bei denen die Leuchtkraft wegen der mangelnden Kenntnis der Sternmassen keinen Schluß auf den Wasserstoffgehalt erlaubt. Als kosmogonische Folgerung dieser Untersuchungen finden die Verff., daß nur Materie mit einem genügend hohen Anteil bereits ionisierten Wasserstoffs überhaupt imstande ist, sich allein unter ihrer gegenseitigen Anziehung zusammenzuballen und als Stern weiter zu entwickeln.

Hubert Slouka (Prag).

Tiercy, Georges: Considérations sur les équations de l'équilibre radiatif et du transfert d'énergie. Arch. Sci. Physique etc. 21, 133—165 et 169—186 (1939).

Verf. geht von den Grundgleichungen des Strahlungsgleichgewichts in Sternen aus und findet die Verteilung der Temperaturen im Sterninneren abhängig vom Wert, welcher der Strahlungsintensität B eines schwarzen Strahlers zugeschrieben wird. Diese Intensität ist eine Funktion der Opazität τ , die durch die Beziehung $\alpha \tau = K \sigma dr$ defi-

niert ist, wobei K den Absorptionskoeffizient, und ϱ die Dichte der betreffenden Masse vorstellen. Verf. versucht nun die entsprechende Form der Funktion $B(\tau)$ zu finden. Oft wird benützt $B(\tau) = a_1 + a_2\tau$, doch genügt diese Lösung aus zwei Gründen nicht den Anforderungen der Probleme der theoretischen Astrophysik: erstens ist es notwendig, die Krümmung der Oberflächenschichten zu vernachlässigen und zweitens die dünne äußerste Oberflächenschichte zu vernachlässigen, weil $B(\tau)$ eine Singularität für $\tau = 0$ zeigt. Verf. kommt zu einer allgemeineren Lösung, indem er die Sternmasse in drei konzentrische Schichten teilt: a) Der zentrale Teil des Sternes, der in einem Kugelraum vom Radius $r' = 0,725 r_0$ enthalten ist. Der Wert τ' für die Oberfläche der Kugel r' ist von der Größenordnung $2 \cdot 10^9$. In diesem zentralen Teil ist der Energieerzeugungskoeffizient ε nicht Null, und die Suche nach der Form der Funktion $B(\tau)$ ist erschwert. Übrigens ist in diesem Gebiet die polytrope Lösung anwendbar. b) Die untersuchte Schicht erstreckt sich von $\tau = \tau'$ bis $-\tau = 15$, wobei $\varepsilon = 0$, dann erhält der Verf. den Ausdruck $B(\tau) = (a_1 + C) + a_2\tau$, wo C eine negative Konstante ($\ll a_1$) ist. c) Die Oberflächenschicht von $-\tau = 15$ bis $\tau = 0$, $\varepsilon = 0$; als Lösung erhält man $B(\tau) = a_1 + a_2\tau - a_3\tau \log(-\tau)$. Verf. gibt die verschiedenen Bedingungen an, unter denen diese Gleichung gilt, und zeigt ihre größere Anwendbarkeit gegenüber der ursprünglichen linearen Form.

Hubert Slouka (Prag).

Allen, C. W.: Stark effect and damping factor in the Fraunhofer spectrum. Monthly Not. Roy. Astron. Soc. 100, 4—9 (1939).

Luyten, W. J.: On the origin of the solar system. Monthly Not. Roy. Astron. Soc. 99, 692—696 (1939).

Gegenstand der Note ist eine erneute Kritik von Lyttletons Theorie der Entstehung des Sonnensystems. Nach dieser Theorie wird die Bildung der Planeten auf die Begegnung eines Doppelsternsystems (Sonne + Körper II) mit einem dritten Stern zurückgeführt, bei welcher der Körper II von der Sonne fortgerissen wurde. Es wird gezeigt, daß das Bild überhaupt nur richtig sein kann, wenn mehrere äußerst spezielle Bedingungen zugleich erfüllt waren. Verf. zieht den Schluß, daß die innere Unwahrscheinlichkeit der Theorie sie nicht als annehmbar erscheinen läßt. L. Biermann. °°

Tuchenhagen, Siegm.: Die neuen Sterne. Berlin: Diss. 1938. 87 S.

Hopmann, Josef: Die Verteilung der absoluten Helligkeiten der Sterne von verschiedenem Spektraltypus. Beobachtungserfahrungen und Ergebnisse. Ergebn. exakt. Naturwiss. 18, 1—25 (1939).

Darlegung der Grundlagen für die Bestimmung von absoluten Helligkeiten der Sterne und Übersicht über einige besonders kennzeichnende neuere Arbeiten über die Verteilung der absoluten Helligkeiten der verschiedenen Spektraltypen. Die seit dem Bericht von R. Heß über das gleiche Thema [Ergebn. exakt. Naturwiss. 3 (1924)] möglich bzw. nötig gewordenen Verfeinerungen werden besprochen. Die kosmische Streuung der absoluten Helligkeiten auf dem Hauptast des Russelldiagramms ist für den genau untersuchten Präsephenhaufen verschwindend klein; ob das auch für andere Haufen und für die Sterne der Sonnenumgebung gilt, ist noch nicht geklärt. Straßl.

Shapley, Harlow: Galactic and extragalactic studies. I. On the corona of stars around the galactic system. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 25, 423—428 (1939).

Die Entdeckung schwacher Sterne vom Typus der in den Kugelhaufen vorkommenden Veränderlichen in hohen galaktischen Breiten zeigt, daß diese Objekte sich bis über 12000 Parsecs Abstand von der galaktischen Ebene erstrecken. Nach den Sternzahlen in den ziemlich vollständig durchmusterter Harvardfeldern des Südhimmels folgt der Dichteabfall senkrecht zur Milchstraßenebene einem Exponentialgesetz; die Anzahl der Haufenveränderlichen im Kubikkiloparsec ergibt sich, je nach der Auswahl des Beobachtungsmaterials, zu 11 bzw. 19 in der galaktischen Ebene und 0,05 bzw. 0,12 in 10 Kiloparsecs Abstand.

Wempe (Jena).